

TƏBİƏT VƏ TEXNİKA ELMLƏRİ BÖLMƏSİ

MSC 26A33, 42B35, 46E30

ÜMUMİLƏŞMİŞ NİKOLSKI-MORRİ FƏZALARINDA RİSS-TORİN TIPLI TEOREMLƏR

Alik Malik oğlu Nəcəfov

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu

Rövşən Fərrux oğlu Babayev

Mingəçevir Dövlət Universiteti

Xülasə

Məqalədə integral şəklində göstəriləsi üsulu ilə ümumiləşmiş Nikolski-Morri tipli fəzalardan olan funksiyalar üçün Riss-Torin tipli teoremlər isbat olunur. Bu fəzaların kəsişməsi daxil olan funksiyaların ümumiləşmiş qarışıq törəmələri üçün L_q fəzasında verilən metrika mənasında Hölder şərti tədqiq edilir.

Açar sözlər: ümumiləşmiş Nikolski-Morri tipli fəza, Riss-Torin tipli teoremlər, qarışıq törəmələr, Hölder şərti

Giriş

Bu məqalədə [2] işində daxil olunan ümumiləşmiş Nikolski-Morri

$$\bigcap_{i=0}^n L_{p, \varphi, \beta}^{<l^i, \mu>}(G_\varphi) \quad (\mu = 1, 2, \dots, M) \quad (1)$$

fəzalarının kəsişməsinə daxil olan funksiyaların bir sıra diferensial və diferensial-fərq xassələri öyrənilir. Başqa sözlə, (1) fəzasından olan, “çevik φ -buynuz” şərtini ödəyən n -ölçülü oblastlarda təyin olunmuş funksiyaların $D^v f$ zəif qarışıq törəmələri üçün Riss-Torin tipli teoremlər isbat olunur.

Bundan başqa, həmçinin həmin zəif qarışıq törəmələrin L_q -də verilən metrika mənaada ümumiləşmiş Hölder şərtini ödəməsi öyrənilir.

Parametrlı fəzalara ilk dəfə Morrinin işində [6] elliptik tip tənliyin həllinin hamarlıq məsələsinin öyrənilməsi zamanı baxılmışdır. Sonralar bu fəzalar Lebeq-Morri- $L_{p, \lambda}(R^n)$ adlandırılmış və bir çox riyaziyyatçılar tərəfindən, o cümlədən, V.P.İlin [8], İ.Ross [3], V.S.Quliyev [4], A.Maccukato [5], Y.Savano [7], A.M.Nəcəfov [1] və başqaları tərəfindən öyrənilərək inkişaf etdirilmişdir.

Tutaq ki, $G \subset R^n$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$, $\varphi_j(t) > 0$ ($t > 0$) vektor-funksiyaları G oblastında Lebeq mənaada ölçüləndir və $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi_j(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_j(t) = K_j \leq \infty$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Belə vektor-funksiyalar çoxluğunu A ilə işrə edək.

Fərz edək ki, $m^i = (m_1^i, \dots, m_n^i)$, $m_j^i \in N$, $k^i = (k_1^i, \dots, k_n^i)$, $k_j^i \in N_0$ ($j \neq 1, 2, \dots, n$; $i = 0, 1, \dots, n$); $l^i = (l_1^i, \dots, l_n^i)$, $l_j^0 \geq 0$, $l_j^i \geq 0$ ($i \neq j = 1, 2, \dots, n$), $l_i^i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Tərif. [2] $G \subset R^n$ oblastında təyin olunmuş xətti normallaşmış və

$$\|f\|_{\bigcap_{i=0}^n L_{p^i, \varphi, \beta}^{<l^i>}(G_\varphi)} = \sum_{i=0}^n \sup_{0 < t < t_0} \frac{\|\Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) D_i^{k_i} f\|_{p^i, \varphi, \beta}}{\prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{l_j - k_j}} \quad (2)$$

sonlu normaya malik f funksiyalar çoxluğuna ümumiləşmiş Nikolski-Morri fəzası deyilir və $\bigcap_{i=0}^n L_{p^i, \varphi, \beta}^{<l^i>}(G_\varphi)$ kimi işarə olunur.

Burada

$$\|f\|_{p^i, \varphi, \beta; G} = \|f\|_{L_{p^i, \varphi, \beta}(G)} = \sup_{\substack{x \in G; \\ t > 0}} \left(|\varphi([t]_1)|^{-\beta} \|f\|_{p, G_{\varphi(t)}(x)} \right), \quad (3)$$

$1 \leq p^i \leq \infty$, $|\varphi([t]_1)|^{-\beta} = \prod_{j=1}^n (\varphi_j([t]_1))^{-\beta_j}$, $\beta_j \in [0, 1]$ ($j=1, 2, \dots, n$); $[t]_1 = \min\{1, t\}$ və hər bir $x \in R^n$

üçün $G_{\varphi(t)}(x) = G \cap I_{\varphi(t)}(x) = G \cap \{y : |y_j - x_j| < \frac{1}{2} \varphi_j(t), j=1, 2, \dots, n\}$.

Tutaq ki, $\lambda_\mu \geq 0$ ($\mu=1, 2, \dots, M$), $\sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu = 1$, $\frac{1}{p} = \sum_{\mu=1}^m \frac{\lambda_\mu}{p_\mu}$, $\frac{1}{p^i} = \sum_{\mu=1}^m \frac{\lambda_\mu}{p_\mu^i}$, $\frac{1}{r} = \sum_{\mu=1}^m \frac{\lambda_\mu}{r_\mu}$, $l^i = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu l^{\mu, i}$ və

$M(\cdot, y) \in C_0^\infty(R^n)$, elədir ki, $S(M) = \text{supp } M \subset I_{\varphi(t)} = \{y : |y_j| < \frac{1}{2} \varphi_j(T), j=1, 2, \dots, n\}$ istənilən

$0 < T \leq 1$ və fərz edək ki, $V = \bigcup_{0 < t \leq T} \left\{ y : \frac{y}{\varphi(t)} \in S(M) \right\}$.

$V \subset I_{\varphi(T)}$ və $U + V \subset G$ olduğunu fərz edək, bu U çoxluğu qapanması ilə G oblastına daxil olan çoxluqdur, yəni $\bar{U} \subset G_0$. Əlavə olaraq fərz edək ki, $\varphi_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, n$) funksiyaları $[0, T]$ -da differensiallanandır.

Lemma. Fərz edək ki, $1 \leq p_\mu^i \leq p_\mu \leq r_\mu \leq \infty$ ($i=0, 1, \dots, n$; $\mu=1, 2, \dots, M$); $0 < \eta$, $t \leq T \leq 1$; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \geq 0$, ($j=1, 2, \dots, n$) tam ədədlərdir; $\Delta^{m^i}(\varphi(t))f \in L_{p_\mu^i, \varphi, \beta}(G)$ və

$$F(x) = \prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{\nu_j - 1} \int_{R^n} \int_{-\infty}^{\infty} M\left(\frac{y}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T), x)}{\varphi(T)}\right) \times \\ \times \zeta^0\left(\frac{u}{\varphi(T)}, \frac{\rho_i(\varphi_i(T), x)}{2\varphi(T)}, \frac{1}{2} \rho'(\varphi(T), x)\right) \times \Delta^{m^0}(\varphi(\delta)u) f(x + y + u) dy du \quad (4)$$

$$F_\eta^i(x) = \int_0^\eta L^i(x, t) \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-\nu_j - 2} \prod_{j \in e_i} \frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)} dt, \quad (5)$$

$$F_{\eta, T}^i(x) = \int_\eta^T L^{(i)}(x, t) \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-\nu_j - 2} \prod_{j \in e_i} \frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)} dt, \quad (6)$$

burada

$$L^{(i)}(x;t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{R^n} M\left(\frac{y}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t), x)}{\varphi(t)}\right) \zeta^{(i)}\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t), x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t), x)\right) \times \\ \times \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) f(x+y+u) dy du \quad (7)$$

$$\text{Əgər } Q_T^i = \int_0^T \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-v_j - (1-\beta_j p)\left(\frac{1}{p^i} - \frac{1}{p}\right)} \prod_{j \in e_i} \frac{\varphi_j'(t)}{1 - \sum_{\mu=1}^M l_j^{\mu} \lambda_{\mu}} dt < \infty \text{ olarsa, onda istənilən } \bar{x} \in U$$

üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$\sup_{\bar{x} \in U} \|F\|_{p, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \leq C_1 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{-l_j^0, \mu} \Delta^{m^0}(\varphi(T), G_{\varphi(T)}) f \right\|_{p_{\mu}^0, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_{\mu}} \times \\ \times \prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{l_j^0 - v_j - (1-\beta_j p^0)\left(\frac{1}{p^0} - \frac{1}{p}\right)} \prod_{j=1}^n (\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j \frac{p^0}{p}}, \quad (8)$$

$$\sup_{\bar{x} \in U} \|F_{\eta}^i\|_{p, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \leq C_2 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^i, \mu} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_{\mu}^i, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_{\mu}} \times |Q_T^i| \prod_{j=1}^n (\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j \frac{p^i}{p}}, \quad (9)$$

$$\sup_{\bar{x} \in U} \|F_{\eta, T}^i\|_{p, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \leq C_3 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^i, \mu} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_{\mu}^i, \varphi, \beta} \right\} \times |Q_{\eta, T}^i| \prod_{j=1}^n (\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j \frac{p^i}{p}}, \quad (10)$$

burada $U_{\psi(\xi)}(\bar{x}) = \left\{ x : |x_j - \bar{x}_j| < \frac{1}{2} \psi_j(\xi), \quad j=1, 2, \dots, n \right\}$, $\psi \in A$ və C_1, C_2, C_3 sabitləri φ, ξ, η, T -dən asılı olmayan müsbət ədədlərdir.

İsbatı: İsbatı $\bar{x} \in U$ üçün ümumiləşmiş Minkovski bərabərsizliyini tətbiq edərək

$$\|F_{\eta}^i\|_{p, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \leq \int_0^{\eta} \|L^i(\cdot, t)\|_{p, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-v_j - 2} \prod_{j \in e^i} \frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)} dt, \quad (11)$$

alarlıq. $\|L^i(\cdot, t)\|_{p, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}$ normasını qiymətləndirək. $\alpha_{\mu} = \frac{p_{\mu}}{\lambda_{\mu} p}$, $\mu = 1, 2, \dots, M$ $\left(\sum_{\mu=1}^M \frac{1}{\alpha_{\mu}} = \frac{1}{p} \sum_{\mu=1}^M \frac{\lambda_{\mu}}{p_{\mu}} = 1 \right)$

qüvvətlərinə nəzərən Hölder bərabərsizliyini $|L^i(x, t)|$ üçün tətbiq edərək,

$$\|L^i(\cdot, t)\|_{p, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \leq C_1 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \|L^i(\cdot, t)\|_{p_{\mu}, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \right\}^{\lambda_{\mu}} \quad (12)$$

münasibətini alarıq. Yenidən $p_{\mu} \leq r_{\mu}$ ($\mu=1, 2, \dots, m$) halı üçün Hölder bərabərsizliyini tətbiq edərək

$$\|L^i(\cdot, t)\|_{p_{\mu}, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \leq \prod_{j=1}^n (\psi_j(\xi))^{\frac{1}{p_{\mu}} - \frac{1}{r_{\mu}}} \|L^i(\cdot, t)\|_{r_{\mu}, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \quad (13)$$

bərabərsizliyini alırıq. İndi $\|L^i(\cdot, t)\|_{\kappa_1, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})}$ normasını qiymətləndirək. Tutaq ki, χ funksiyası $S(L^i)$ çoxluğunun xarakteristik funksiyasıdır. (7) bərabərliyi ilə təyin olunan $L^i(x, t)$ funksiyasına $1 \leq p_\mu^i \leq r_\mu \leq \infty$, $s_\mu \leq r_\mu$, $\frac{1}{s_\mu} = 1 - \frac{1}{p_\mu^i} + \frac{1}{r_\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, M$) halında

$$\begin{aligned} \|L^i(\cdot, t)\|_{r_\mu, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} &\leq C \sup_{x \in U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \left(\int_{R^n} \int_{-\infty}^{\infty} |\zeta^i(\dots)| \left| \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) f(x+y+u) \right| du \left| \chi\left(\frac{y}{\varphi(t)}\right) dy \right|^{p_\mu^i} \right)^{\frac{1}{p_\mu^i} \frac{1}{r_\mu}} \times \\ &\leq C \sup_{y \in V} \left(\int_{U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t), x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t), x)\right) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) f(x+y+u) du \left| dx \right|^{\frac{1}{p_\mu^i}} \right)^{\frac{1}{r_\mu}} \times \\ &\quad \times \left(\int_{R^n} \left| \tilde{M}\left(\frac{y}{\varphi(t)}\right) \right|^{s_\mu} dy \right)^{\frac{1}{s_\mu}} \end{aligned} \quad (14)$$

alırıq. $M(\cdot, y, z)$ funksiyası isə sanki hər bir $(y, z) \in R^n \times R^n$ üçün $|M(x, y, z)| \leq C |\tilde{M}(x)|$ şərtini ödəyir və $\tilde{M} \in C_0^\infty(R^n)$ olduğunu fərz edək.

İstənilən $x \in U$ üçün

$$\begin{aligned} &\int_{R^n} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t), x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t), x)\right) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) f(x+y+u) du \left| \chi\left(\frac{y}{\varphi(t)}\right) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{(U+V)_{\varphi(t)}(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i(*) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) f(y+u) du \left| dy \right| \leq \int_{G_{\varphi(t)}(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i(*) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) f(y+u) du \left| dy \right| \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{l_j^{i, \mu} p_\mu^i} \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{i, \mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^i, G_{\varphi(t)}(z)}^{p_\mu^i} \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{l_j^{i, \mu}, p_\mu^i} \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{i, \mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta}^{p_\mu^i} \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{\beta_j, p_\mu^i}, \end{aligned} \quad (15)$$

hər bir $y \in V$ üçün

$$\begin{aligned} &\int_{U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i\left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t), x)}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2}\rho'(\varphi(t), x)\right) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) f(x+y+u) du \left| dx \right| \leq \\ &\leq \int_{(U+V)_{\psi(\xi)}(\bar{x}+y)} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^i(*) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) f(x+u) du \left| dx \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{l_j^{\mu}, p_\mu^i} \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{\mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta}^{p_\mu^i} \prod_{j=1}^n (\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j, p_\mu^i} \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{l_j^{\mu}, p_\mu^i} \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{\mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta}^{p_\mu^i} \times \prod_{j=1}^n (\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j, p_\mu^i}, \quad (U+V)_{\psi(\xi)} \subset G_{\varphi(t)}, \quad (16)$$

$$\int_{R^n} \left| \tilde{M} \left(\frac{y}{\varphi(t)} \right) \right|^{s_\mu} dy = \|\tilde{M}\|_{s_\mu}^v \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t)) \quad (17)$$

münasibətlərini alırıq.

(15)-(17) münasibətlərini (14) bərabərsizliyində nəzərə alsaq, onda

$$\|L^i(\cdot, t)\|_{r_\mu, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \leq \|\tilde{M}\|_{s_\mu} \cdot \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{\mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{s_\mu + \beta_j p^i \left(\frac{1}{p^i} - \frac{1}{r} \right)} \prod_{j=1}^n (\psi_j([\xi]_1))^{\frac{\beta_j p^i}{r}}, \quad (18)$$

(11), (12) bərabərsizliklərinin köməyi ilə $r_\mu = p_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, M$) və hər bir $\bar{x} \in U$ üçün (9) bərabərsizliyini alırıq:

$$\sup_{\bar{x} \in U} \|F_\eta^i\|_{p, U_{\psi(\xi)}(\bar{x})} \leq C_2 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{\mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_\mu} \times |Q_T^i| \prod_{j=1}^n (\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j \frac{p^i}{p}}.$$

Eyni yolla (8) və (10) bərabərsizliklərini alırıq.

Nəticə: (8)-(10) bərabərsizliklərdən

$$\|F\|_{p, \psi, \beta; U} \leq C^1 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{0, \mu}} \Delta^{m^0}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^0, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_\mu}, \quad (19)$$

$$\|F_\eta^i\|_{p, \psi, \beta; U} \leq C^2 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{\mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_\mu}, \quad (20)$$

$$\|F_{\eta, T}^i\|_{p, \psi, \beta; U} \leq C^3 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{\mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(t)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_\mu}. \quad (21)$$

Əsas nəticələr

İndi $\bigcap_{i=0}^n L_{p_\mu, \varphi, \beta}^{<i, \mu>}(G_\varphi)$, $\mu = 1, 2, \dots, M$ fəzalarının kəsişməsinə daxil olan funksiyaların bir sıra diferensial xassələri haqqında iki teoremi isbat edək.

Teorem 1. Tutaq ki, $G \subset R^n$ “çevik φ -buynuz” çərtini ödəyir [Naj Rus]; $1 \leq p_\mu^i \leq p_\mu \leq \infty$ ($\mu = 1, 2, \dots, M$); $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, $\nu_j \geq 0$, ($j = 1, 2, \dots, n$) tamdırlar; $\nu_j \geq l_j^0$, $\nu_j \geq l_j^i$ ($j \neq i = 1, 2, \dots, n$), $\nu_i < l_i^i$ ($i = 1, 2, \dots, n$); $Q_T^i < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$), və $f \in \bigcap_{\mu=1}^M \bigcap_{i=0}^n L_{p_\mu^i, \varphi, \beta}^{< l^{i, \mu} >} (G_\varphi)$.

Onda aşağıdakı daxilolma faktı doğrudur $D^\nu : \bigcap_{\mu=1}^M \bigcap_{i=0}^n L_{p_\mu^i, \varphi, \beta}^{< l^{i, \mu} >} (G_\varphi) \rightarrow L_{p, \psi, \beta_1} (G)$, daha doğrusu,

$f \in \bigcap_{\mu=1}^M \bigcap_{i=0}^n L_{p_\mu^i, \varphi, \beta}^{< l^{i, \mu} >} (G_\varphi)$ üçün $D^\nu f$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələri var və aşağıdakıları doğrudur

$$\|D^\nu f\|_{p, G} \leq C^1 \sum_{i=0}^n |H_T^i| \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{i, \mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(T)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_\mu}, \quad (22)$$

$$\|D^\nu f\|_{p, \psi, \beta_1; G} \leq C^2 \prod_{\mu=1}^M \left\{ \|f\|_{\bigcap_{i=0}^n L_{p_\mu^i, \varphi, \beta}^{< l^{i, \mu} >} (G)} \right\}^{\lambda_\mu}, \quad p^i \leq p < \infty. \quad (23)$$

Xüsusi halda, əgər $Q_{T,0}^i = \int_0^T \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-\nu_j - (1-\beta_j p^i) \frac{1}{p^i}} \prod_{j \in e^i} \frac{\varphi_j'(t) dt}{(\varphi_j(t))^{1 - \sum_{\mu=1}^M l_j^{i, \mu} \lambda_\mu}} < \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ olarsa,

$D^\nu f(x)$ G oblastında kəsilməzdir və

$$\sup_{x \in G} |D^\nu f(x)| \leq C^1 \sum_{i=0}^n |H_{T,0}^i| \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{i, \mu}} \Delta^{m^i}(\varphi(t), G_{\varphi(T)}) f \right\|_{p_\mu^i, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_\mu}, \quad (24)$$

burada $H_T^i = \begin{cases} H_T^0 = \prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{-\nu_j - (1-\beta_j p^0) \left(\frac{1}{p^0} - \frac{1}{p} \right)}, & \nu = 0 \\ Q_T^i, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$

$$\left(H_{T,0}^i = \begin{cases} H_{T,0}^0 = \prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{-\nu_j - (1-\beta_j p^0) \frac{1}{p^0}}, & \nu = 0 \\ Q_{T,0}^i, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \right)$$

$0 < T \leq \min\{1, T_0\}$, T_0 qeyd olunmuş müsbət ədəddir, C^1 və C^2 sabitləri f -dən, C^1 sabiti həmçinin T -dən asılı olmayan müsbət ədədlərdir.

İsbatı: Əvvəlcə qeyd edək ki, bu teoremin şərtləri daxilində $f \in \bigcap_{\mu=1}^M \bigcap_{i=0}^n L_{p_\mu^i, \varphi, \beta}^{< l^{i, \mu} >} (G_\varphi)$ üçün $D^\nu f$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələri var. Doğrudan da, $Q_T^i < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$) şərtindən hər bir

$$f \in \prod_{\mu=1}^M \prod_{i=0}^n L_{p_{\mu}^i, \varphi, \beta}^{<l^{i, \mu}>} (G_{\varphi}) \rightarrow \prod_{i=0}^n L_{p_{\mu}^i, \varphi, \beta}^{<l^{i, \mu}>} (G_{\varphi}) \rightarrow \prod_{i=0}^n L_{p_{\mu}^i}^{<l^{i, \mu}>} \rightarrow L_{p_{\mu}^i}^{<l^{i, \mu}>} (G_{\varphi})$$

üçün $D^{\nu} f$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələri var, $D^{\nu} f \in L_p(G)$ və sanki hər bir $x \in U \subset G$ üçün aşağıdakı inteqral göstərilişi doğrudur

$$\begin{aligned} D^{\nu} f(x) &= (-1)^{|\nu|} \prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{-\nu_j-1} \int_{R^n} \int_{-\infty}^{\infty} K^{0,(\nu)} \left(\frac{y}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T, x))}{\varphi(t)} \right) \times \\ &\quad \times \zeta^0 \left(\frac{u}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T, x))}{2\varphi(T)}, \frac{1}{2} \rho'(\varphi(T, x)) \right) \Delta^{m^0}(\varphi(\delta)u) \times \\ &\quad \times f(x+y+u_1+\dots+u_n) dy du + \sum_{i=1}^n (-1)^{|\nu|} \int_0^T \int_{R^n} \int_{-\infty}^{\infty} K^{i,(\nu)} \left(\frac{y}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t, x))}{\varphi(t)} \right) \times \\ &\quad \times \zeta^i \left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t, x))}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2} \rho'(\varphi(t, x)) \right) \zeta^i \left(\frac{u}{\varphi(t)}, \frac{\rho(\varphi(t, x))}{2\varphi(t)}, \frac{1}{2} \rho'(\varphi(t, x)) \right) \Delta^{m^i}(\varphi(\delta)u) \times \\ &\quad \times f(x+y+u_1+\dots+u_n) dy du \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-\nu_j-2} \prod_{j \in \mathcal{E}_i} \frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)} dt du dy \end{aligned} \quad (25)$$

(25) eyniliyindən Minkovski bərabərsizliyinə əsasən

$$\|D^{\nu} f\|_{p, G} \leq \|f_{\varphi(T)}^{(\nu)}\|_{p, G} + \sum_{i=1}^n \|F_T^i\|_{p, G} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} f_{\varphi(T)}^{(\nu)}(x) &= (-1)^{|\nu|} \prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{-\nu_j-1} \int_{R^n} \int_{-\infty}^{\infty} K^{0,(\nu)} \left(\frac{y}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T, x))}{\varphi(t)} \right) \times \\ &\quad \times \zeta^0 \left(\frac{u}{\varphi(T)}, \frac{\rho(\varphi(T, x))}{2\varphi(T)}, \frac{1}{2} \rho'(\varphi(T, x)) \right) \Delta^{m^0}(\varphi(\delta)u) f(x+y+u_1+\dots+u_n) du dy \end{aligned}$$

alırıq. (8) bərabərsizliyinin köməyi ilə $U = G$, $M = K^{0,(\nu)}$ olduqda $\prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{l_j^0 - \nu_j - (1-\beta_j)p} \left(\frac{1}{p^0} - \frac{1}{p} \right)$

$$\|F\|_{p, G} \leq C_1 |H_T^0| \prod_{j=1}^n (\psi_j([\xi]_1))^{\beta_j - \frac{p^0}{p}} \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(T))^{-l_j^{0, \mu}} \Delta^{m^0}(\varphi(t), G_{\varphi(T)}) f \right\|_{p_{\mu}^0, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_{\mu}}, \quad (27)$$

(9) bərabərsizliyinə əsasən $\eta = T$, $U = G$, $M = K^{i,(\nu)}$ üçün

$$\|F_T^i\|_{p, G} \leq C_2 |Q_T^i| \prod_{\mu=1}^M \left\{ \left\| \prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{-l_j^{0, \mu}} \Delta^{m^0}(\varphi(t), G_{\varphi(T)}) f \right\|_{p_{\mu}^i, \varphi, \beta} \right\}^{\lambda_{\mu}} \quad (28)$$



alırıq. (27) və (28) bərabərsizliklərini (26) bərabərsizliyində yerinə yazsaq (22) bərabərsizliyini alırıq. Analoji yolla (19) və (20) bərabərsizliklərinin köməyi ilə (23) bərabərsizliyini alırıq.

Tutaq ki, indi $Q_{T,0}^i < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$) şərtləri ödənilir. Onda (25) eyniliyinin köməyi ilə (26) bərabərsizliyindən alırıq:

$$\|D^\nu f - f_{\varphi(T)}^{(\nu)}(x)\|_{\infty, G} \leq C^1 \sum_{i=1}^n |H_{T,0}^i| \prod_{\mu=1}^M \left\{ \frac{\|\Delta^{n_i}(\varphi(t), G_{\varphi(T)})f\|_{p_{\mu, \varphi, \beta}^{i, \mu}}}{\prod_{j=1}^n (\varphi_j(t))^{i_j, \mu}} \right\}^{\lambda_\mu}$$

$T \rightarrow 0$ yaxınlaşdıqda axırncı bərabərsizliyin sol tərəfi sıfıra yaxınlaşır. $f_{\varphi(T)}^{(\nu)}(x)$ funksiyaları G oblastında kəsilməzdir və bu halda $L_\infty(G)$ $\varphi(T)$ fəzasında yığılma müntəzəm yığılma ilə üst-üstə düşdüyündən, $D^\nu f$ limit funksiyaları da G oblastında kəsilməz olacaqdır.

Teorem 1 isbat olundu.

Tutaq ki, γ n -ölçülü vektordur.

Teorem 2. Tutaq ki, Teorem 1-in bütün şərtləri ödənilir. Onda $Q_T^i < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, \infty$) halı üçün $D^\nu f$ ümumiləşmiş qarışıq törəmələri G oblastında L_p olan metrika mənada ümumiləşmiş Hölder şərtini ödəyir, başqa sözlə, aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur

$$\|\Delta(\gamma, G)D^\nu f\|_{p, G} \leq C \prod_{\mu=1}^M \left\{ \|f\|_{\bigcap_{i=0}^n L_{p_{\mu, \varphi, \beta}}^{i, \mu}(G_\varphi)} \right\}^{\lambda_\mu} |R(|\gamma|, \varphi; T)|, \quad (29)$$

burada C sabiti $f, |\gamma|$ və T -dən asılı olmayan müsbət ədəddir. Xüsusi halda, əgər $Q_{T,0}^i < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olarsa, onda

$$\sup_{x \in G} |D^\nu f(x)| \leq C \prod_{\mu=1}^M \left\{ \|f\|_{\bigcap_{i=0}^n L_{p_{\mu, \varphi, \beta}}^{i, \mu}(G_\varphi)} \right\}^{\lambda_\mu} |R_0(|\gamma|, \varphi; T)|, \quad (30)$$

burada $R(|\gamma|, \varphi; T) = \max_i \{|\gamma|, Q_{|\gamma|}^i, Q_{|\gamma|, T}^i\}$, $(R_0(|\gamma|, \varphi; T) = \max_i \{|\gamma|, Q_{|\gamma|, 0}^i, Q_{|\gamma|, T, 0}^i\})$.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Akbulut A., Eroglu A., Najafov A.M. Some embedding theorems on the Nikolski-Morrey type spaces // Advances in Analysis, 1, №1, 2016, pp.18-26
2. Babayev R.F. Some differential properties of generalized Nikolski-Morrey type spaces // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and economics, v.5, 2, 2017, pp.106-115
3. Ross I. A Morrey-Nikolskii inequality // Proceedings Amer. Math. Soc., 78, 1980, pp.97-102
4. Guliyev V.S. Generalized weighted Morrey spaces and higher order comutators of sublinear operators // Eurasian Math. J., 3, 2012, pp.33-61
5. Mazzucato A.I. Bessov-Morrey spaces. Function space theory and applications to nonlinear PDE // Trans. Amer. Math. Soc., 355, 2002, 1297-1364.
6. Morrey C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc., 43, 1938, pp.126-166
7. Sawan Y. Identification of the image of Morrey spaces by the fractional integral operators // Proc. A.Razmadze Math. Inst., 149, 2009, pp.87-93



8. Ильин В.П. О некоторых свойствах функций из пространства $W_{p,a,\chi}^l(G)$ / записки научного семинара ЛОМИ им. Стеклова, 23, 1971, с.33-40

A.M.Nacafov

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS*

R.F.Babayev

Mingachevir State University

Riesz-Thorin type theorems for functions in generalized Nicholsky-Morrey spaces

Abstract

In the article Riesz-Thorin type theorems for functions from a generalized Nicholsky-Morrey type spaces are provided by a method of integral representation. The Holder condition in the metric sense, given in the space L_q , for generalized mixed derivatives of functions containing the intersection of these spaces is investigated.

Keywords: *generalized Nikolskii-Morrey type space, Riesz-Thorin type theorems, mixed derivatives, Holder condition*

A.M.Наджафов

*доктор физико-математических наук, профессор
Институт математики и механики НАНА*

Р.Ф.Бабаев

Мингячевирский государственный университет

Теоремы типа Риса-Торина в обобщенных пространствах Никольского-Морри

Резюме

В статье методом интегрального представления доказываются теоремы типа Риса-Торина для функций из обобщенного пространства типа Никольского-Морри. Исследуется условие Гельдера в метрическом смысле, заданном в пространстве L_q , для обобщенных смешанных производных функций, содержащих пересечение этих пространств.

Ключевые слова: *обобщенное пространство типа Никольского-Морри, теоремы типа Рис-Торина, смешанные производные, условие Гельдера*

Daxil olub: 06.09.2021