TƏBİƏT VƏ TEXNİKA ELMLƏRİ BÖLMƏSİ

UOT 373.1.02:372.8

FUNKSİYANIN SABİTLİK ƏLAMƏTİNİN CƏBRİ XARAKTERLİ BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ TƏTBİQİ

Müsəllim Mövsüm oğlu Hümmətov
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Mingəçevir Dövlət Universiteti

Xülasə
Məqalə funksiyanın sabitlik əlamətinin bəzi cəbri xarakterli məsələlərin həllinə tətbiqinə həsr olunmuşdur. Burada eyniliklərin və bərabərsizliklərin isbatına və tənliklərin həllinə dair bir neçə qeyri-standart çalışmların həllinə baxılır.
Açar sözlər: *sabitlik əlaməti, eynilik, bərabərsizlik, tənlik, funksiya, törəmə*

Riyazi analizin elementlərinin məktəb riyaziyyat kursunda tədrisinin əsas məqsədlərindən biri törəmənin bir sıra tətbiqlərinin öyrədilməsidir. Bunun xüsusi əhəmiyyət daşımasına baxmayaraq, reallaşdırılmasında müəyyən çatışmazlıqlar mövcuddur.

Məktəb kursunda törəmənin cəbri xarakterli məsələlərə tətbiqinə demək olar ki, baxılmır. Törəmənin cəbri tətbiqi dedikdə onun ənənəvi olaraq, cəbrə aid edilən məsələlərin həllinə tətbiqi nəzərdə tutulur. Bunlara misal olaraq, törəmənin eyniliklərin və bərabərsizliklərin isbatına, ifadələrin sadələşdirilməsinə, tənliklərin həllinə tətbiqini və s. göstərmək olar.

Riyazi analizin elementlərinin tədris olunduğu XI sinfin riyaziyyat kursunda funksiyanın sabitlik əlaməti adlanan aşağıdakı teoremə baxılır ki, bu teoremi cəbri xarakterli bəzi məsələlərin həllinə tətbiq imkanı yaranır [1]. Bu teoremi bir qədər fərqli şəkildə aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

Teorem. Əgər iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının (a,b) intervalının bütün nöqtələrində bərabər törəmələri varsa, onda bu funksiyaların fərqi (a,b) intervalında sabitdir.

Bu teoremdən bir başa eyniliklərin isbatı alqoritmi alınır. $f(x)=g(x)$ eyniliyinin $[a,b]$ aralığında doğruluğunu isbat etmək üçün aşağıdakıları yoxlamaq lazımdır:

1) $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a,b]$ aralığında kəsilməzdir;
2) $f'(x)$ və $g'(x)$ törəmələri (a,b) intervalında bərabərdir.
3) $x_0 \in (a,b)$ şərtini ödəyən bir nöqtədə bu funksyalar bərabər qiymət alır.

İndi funksiyanın sabitlik əlamətinin tətbiqinə aid bir neçə misala baxaq.

Misal 1. Eyniliyi isbat edin: $2\sin^4 x - \frac{1}{4}\cos 4x = \frac{3}{4} - \cos 2x$. [2, s.7]

$f(x)=2\sin^4 x - \frac{1}{4}\cos 4x$ və $g(x)=\frac{3}{4}-\cos 2x$ funksiyalarına baxaq və bu funksiyaların törəməsini tapaq:

$f'(x)=8\sin^3 \cos x + \sin 4x = 2\sin 2x\left(2\sin^2 x + \cos 2x\right) = 2\sin 2x$; $g'(x)=2\sin 2x$. Deməli, törəmələr bərabərdir: $f'(x)=g'(x)$. Beləliklə, x-in hər bir qiymətində bu funksiyaların fərqi sabitdir: $f(x)-g(x)=C$. Həmin sabiti tapmaq üçün $f(x)-g(x)$ fərqində x-in əvəzinə hesablama üçün

əlverişli olan bir ədəd yazaq. Burada əlverişli ədəd olaraq, $x=0$ götürək:
$C=f(0)-g(0)=2\sin^4 0-\frac{1}{4}\cos 4\cdot 0-\frac{3}{4}+\cos 2\cdot 0=0$

Beləliklə, isbat etdik ki, $f(x)-g(x)=0\Rightarrow f(x)=g(x)$. Eynilik isbat olundu.

Qeyd edək ki, bu isbat metodu əksər triqonometrik eyniliklərin isbatında tətbiq oluna bilər.

Eyniliklərin isbatına törəməni bir qədər fərqli şəkildə tətbiq etmək olar.

Misal 2. Eyniliyi isbat edin: $arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2}$

Burada funksiyanın sabitlik əlamətini məktəb kursundakı formada tətbiq etmək əlverişlidir. $f(x)=arctgx+arcctgx$ funksiyasına baxaq. Bu funksiyanın törəməsi

$$f'(x)=(arctgx)'+(arcctgx)'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

Deməli, baxılan funksiya bütün ədəd oxunda sabit qiymət alır: $arctgx+arcctgx=C$. Bu sabiti tapmaq üçün $x=1$ qəbul edək.

$C=arctg1+arcctg1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. Eynilik isbat olundu.

Misal 3. Eyniliyi isbat edin: a) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$; b) $\arcsin x=arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

a) $f(x)=\arcsin x$ və $g(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$ funksiyalarının törəməsini tapaq:

$$f'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$g'(x)=\left(\arccos\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(1-x^2\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Funksiyaların törəməsi bərabərdir. Buna görə də funksiyaların fərqi sabitdir: $f(x)-g(x)=C$. Həmin C sabitini tapmaq üçün $x=0$ qəbul edək:

$C=f(0)-g(0)=\arcsin 0-\arccos 1=0$. Deməli, $f(x)-g(x)=0\Rightarrow f(x)=g(x)$

b) $f(x)=\arcsin x$ və $g(x)=arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyalarının törəməsini tapaq:

$$f'(x)=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(x)=\left(arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\left(1-x^2\right)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Deməli, törəmələr bərabərdir. Onda bu funksiyaların fərqi sabitdir: $f(x)-g(x)=C$. Bu sabiti tapmaq üçün $x=0$ qəbul edək:

$$C=f(0)-g(0)=\arcsin 0-arctg\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0.$$

Onda alınır ki, $f(x)-g(x)=0\Rightarrow f(x)=g(x)$.

Eynilik isbat olundu.

Misal 4. Eyniliyi isbat edin:

$f(x)=(x+a)^3$ və $g(x)=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ funksiyalarına baxaq. Burada x-ə sərbəst dəyişən (arqument), a-ya isə sabit (parametr) kimi baxaq. Bu funksiyaların törəməsini tapaq:

$$f'(x)=3(x+a)^2\cdot(x+a)'=3(x+a)^2,\ g'(x)=3x^2+6xa+3xa^2=3\left(x^2+2ax+a^2\right)=3(x+a)^2$$

Deməli, törəmələr bərabərdir. Onda bu funksiyaların fərqi sabitdir: $f(x)-g(x)=C$

Həmin sabiti tapmaq üçün $x=a$ qəbul edək:

$$C=f(a)-g(a)=(a+a)^3-\left(a^3+3a^2a+3aa^2+a^3\right)=8a^3-8a^3=0.$$

Deməli, $f(x)-g(x)=0\Rightarrow f(x)=g(x)$. Eynilik isbat olundu.

Misal 5. $\log_a x^k=k\log_a x$ eyniliyini isbat edin, burada $x>0$. [1, s.8]

$f(x)=\log_a x^k$ və $g(x)=k\log_a x$ funksiyalarına baxaq. Burada x-ə arqument, a və k-ya isə parametr kimi baxaq və bu funksiyaların törəməsini tapaq:

$$f'(x)=\frac{\left(x^k\right)'}{x^k\ln a}=\frac{kx^{k-1}}{x^k\ln a}=\frac{k}{x\ln a},\qquad g'(x)=k\cdot\frac{1}{x\ln a}=\frac{k}{x\ln a}$$

Deməli, bu funksiyaların fərqi sabitə bərabərdir: $f(x)-g(x)=C$. Bu sabiti tapmaq üçün $x=a$ qəbul edək: $C=f(a)-g(a)=\log_a a^k-k\log a_a=k-k=0$.

Deməli, $f(x)-g(x)=0\Rightarrow f(x)=g(x)$. Eynilik isbat olundu.

Burada törəmənin digər cəbri tətbiqləri olaraq, törəmənin bərabərsizliklərin həllinə və isbatına və həmçinin tənliklərin həllinə tətbiqinə baxacağıq. Bu məsələlərin nəzəri əsaslarını funksiyanın monotonluq şərtləri adlanan təkliflər təşkil edir. Bu təklifləri aşağıdakı teoremdə birləşdirmək məqsədəuyğundur.

Teorem. Əgər f funksiyası verilmiş aralıqda diferensiallanandırsa və bu aralığın hər bir nöqtəsində:

a) $f'(x)>0$ olarsa, f funksiyası bu aralıqda artandır.

b) $f'(x)<0$ olarsa, f funksiyası bu aralıqda azalandır.

c) $f'(x)=0$ olarsa, f funksiyası bu aralıqda sabitdir. [2, s.193]

Misal 6. İsbat edin ki, $e^x\geq 1+x$ bərabərsizliyi x-in bütün mənfi olmayan qiymətlərində ödənilir.

Həlli. $[0;+\infty)$ aralıgında təyin edilən $f(x)=e^x-1-x$ funksiyasına baxaq. Bu funksiyanın törəməsini tapaq: $f'(x)=e^x-1$. $x\geq 0$ olduğundan funksiyanın törəməsi mənfi qiymət almır. Onda funksiya baxılan aralıqdə artandır. Həmçinin $f(0)=0$ və funksiya artan olduğundan x-in bütün mənfi olmayan qiymətlərində $f(x)\geq 0$ olur. Bu isə isbat edəcəyimiz $e^x\geq 1+x$ bərabərsizlik ilə eynigüclüdür.

Misal 7. $\ln x=x-1$ tənliyini həll edin. [3, s.9]

Həlli. $f(x)=\ln x-x+1$ funksiyasına baxaq. Bu funksiyanın təyin oblastı bütün müsbət həqiqi ədədlər çoxluğudur: $D(f)=(0;+\infty)$. Bu funksiyanın törəməsini tapaq:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

Funksiyanın böhran nöqtəsi: $f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x}{x}=0\Rightarrow x=1$. $x<0$ olduqda $f'(x)>0$, $x>0$ olduqda isə $f'(x)<0$ olduğundan $x=1$ funksiyanın maksimum nöqtəsidir. Yoxlamaq olar ki, $f_{\max.}=f(1)=0$. Bu o deməkdir ki, $x=1$ verilmiş tənliyin köküdür. x-in yerdə qalan mümkün qiymətlərinin hər birində isə $f(x)<0$ olacaqdır, yəni , $x=1$ verilmiş tənliyin yeganə köküdür.

Törəmə bəzi qeyri-standart məsələlərin həllinə də tətbiq oluna bilir.

Misal 8. Tənliyi həll edin: $\frac{1}{x}+2\sqrt{x}=3y(1-\ln y)$. [3, s.9]

Həlli. $f(x)=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$ və $g(y)=3y(1-\ln y)$ funksiyalarına baxaq. Hər iki funksiyanın təyin oblastı bütün müsbət hıqiqi ədədlər çoxluğudur:

$$D(f(x))=(0;+\infty),\ D(g(y))=(0;+\infty).$$

Törəmələri tapaq:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2},\ g'(y)=-3\ln y.$$

$f(x)$ funksiyasının böhran nöqtəsini tapaq:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2=\sqrt{x}\Rightarrow x^4=x\Rightarrow x(x^3-1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

$x=0$ funksiyanın təyin oblastına daxil olmadığından yeganə böhran nöqtəsi $x=1$-dir. Törəməni $f'(x)=\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$ şəklində yazaq. Aşkardır ki, $0<x<1$ olarsa, $f'(x)<0$, $x>1$ olduqda isə $f'(x)>0$ olur. Deməli, $x=1$ minimum nöqtəsidir: $f_{\min.}=f(1)=3$.

$g'(y)=0\Rightarrow-3\ln y=0\Rightarrow y=1$, yəni $y=1$ $g(y)$funksiyasının böhran nöqtəsidir. $0<y<1$ olduqda $g'(y)>0$, $y>1$ olduqda isə $g'(y)<0$. Buna görə də $y=1$ funksiya-nın maksimum nöqtəsidir: $g_{\max.}=g(1)=3$. Beləliklə, verilmiş tənliyin o zaman həlli var ki, onun hər iki tərəfi 3-ə bərabər olsun. Yuxarıda göstərildiyi kimi sol və sağ tərəf 3-ə bərabər qiyməti uyğun olaraq, $x=1$ və $y=1$ olduqda alır. Beləliklə, verilmiş tənliyin yeganə həlli $x=1$, $y=1$ cütüdür

Cəbri xarakterli daha bir misala baxaq.

Misal 9. Hansı böyükdür: 2019^{2020} yaxud 2010^{2009}.

Həlli. Bu məsələni ümumi şəkildə həll etmək məqsədi ilə əvvəlcə $a>b\geq e$ şərti ödənildikdə $\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$ bərabərsizliyinin doğruluğunu isbat edək, burada e natural loqarifmanın əsasıdır. Həmin bərabərsizliyi isbat etmək üçün $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ funksiyasını tədqiq edək. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ törəməsinin işarəsi $x>e$ olduqda mənfi olduğundan $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ funksiyası $[e;+\infty)$ aralığında azalandır. Buna görə də $a>b\geq e$ şərti ödənildikdə $\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$ bərabərsizliyinin doğruluğu isbat edilmiş olur. İsbat etdiyimiz bərabərsizliyi aşağıdakı şəkildə çevirək:

$$\frac{1}{a}\ln a<\frac{1}{b}\ln b\Rightarrow\ln a^{\frac{1}{a}}<\ln b^{\frac{1}{b}}\Rightarrow a^{\frac{1}{a}}<b^{\frac{1}{b}}\Rightarrow\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^{ab}<\left(b^{\frac{1}{b}}\right)^{ab}\Rightarrow a^b<b^a.$$

Beləliklə, $a>b\geq e$ şərti ödənildikdə $a^b<b^a$ bərabərsizliyinin doğruluğunu isbat etdik. İndi qoyulmuş məsələni həll etmək olar: $2010>2009>e$ olduğundan isbat edilmiş bərabərsizliyə əsasən $2020^{2019}<2019^{2020}$ yaxud $2019^{2020}>2020^{2019}$olur.

Göstərilən misallar funksiyanın sabitlik əlamətinin cəbri xarakterli məsələlərin həllinə tətbiqinin bütün imkanlarını əhatə etmir.

Nəhayət qeyd edək ki, belə tip məsələlərin həlli fəndaxili inteqrasiyanın reallaşdşırılmasına və şagirdlərdə riyazi məsələlərin həllinə funksional yaxınlaşma baçarıqlarının formalaşmasına xidmət edir.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Mərdanov M.C., Yaqubov M.H. və b. Cəbr və analizin başlanğıcı: Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün dərslik. Bakı: Çaşıoğlu, 2004, 304 s.
2. Qəhrəmanova N., Kərimov M. və b. Riyaziyyat 11: Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün dərslik. Bakı: Radius, 2018, 320 s.
3. Преподавание алгебры и геометрии в школе / Сост. О.А.Боковнев. М.: Просвещение, 1982, 224 с.

Hummatov M.M.
Doctor of Philosophy in Pedagogy, Associate Professor
Mingachevir State University

Application of the sign of constancy of a function to the solution of some algebraic problems

Abstract

The article devoted to the application of sign for constancy of a function to the solution of some problems of algebraic charachter. Here proof of identities and inequalities, and some non-standart exercizes for solving of equations are considered.

Keywords: *sign of constancy, identity, inequality, equation, function, derivative*

Гумматов М. М.
доктор философии по педагогике, доцент
Мингячевирский государственный университет

Применение признака постоянства функции к решению некоторых алгебраических задач

Резюме

Статья посвящена применению признака постоянства функции к решению некоторых задач алгебраического характера. Рассматриваются доказательства тождеств и неравенств, и решения некоторых нестандартных упражнений по теме уравнений.

Ключевые слова: *признак постоянства, тождество, неравенство, уравнение, функция, производная.*