UOT 512.64

RİYAZİ İNDUKSİYA METODUNUN BƏZİ TƏTBİQLƏRİ

Məhəmməd Nazim oğlu Məmmədov
Mingəçevir Dövlət Universiteti
mahammad.mammadov@mdu.edu.az

Səyyarə İlham qızı Yusifova
Mingəçevir Dövlət Universiteti
sayyara.yusifova@mdu.edu.az

Xülasə

Məqalədə riyaziyyatın tədrisində riyazi induksiya metodunun bəzi tipik bərabərliklərin isbat olunmasına, olimpiada xarakterli çalışmaların həllinə tətbiqi misallar həll edilməklə göstərilmişdir. Məqsəd şagirdlərin riyaziyyata marağını artırmaq, onların fənn olimpiadalarında çətinlik dərəcəsi yüksək olan çalışmaların bu metoddan istifadə edərək uğurla həll etmələrinə nail olmaqdır.

Açar sözlər: *riyaziyyat, riyazi induksiya metodu, bərabərlik, natural ədədlər, doğrudur*

İsbat məsələləri həllinin axtarılmasında, məsələni həll etmək üçün onun şərtləri və nəticəsini əlaqələndirməyə imkan verən aralıq şərtlərin seçilməsi zəruridir. Aralıq faktların seçilməsi mürəkkəb iş olduğundan, çox vaxt onu intuisiya, düşüncə üzrə aparmaq lazım gəlir. Bu yaradıcı iş olduğundan onu hansısa mexaniki, trafaret qaydalarına gətirmək doğru deyil. Bununla yanaşı, bu o demək deyildir ki, aralıq faktlar sırf təsadüfi xarakter daşıyır. Belə ki, onun müəyyən məqsədi vardır: aralıq faktlar ardıcıl olaraq şərt və nəticəni birləşdirməlidir və vahid tam şəkildə özünü göstərməlidir. [5, s.122]

Fikrimizi riyazi induksiya metodunun tətbiqləri üzərində izah edək.

İnduksiya (*industio* – latın sözündən alınmışdır və yönəltmə mənasını verir) çox geniş mənaya malik anlayış olub təkcə riyaziyyat elmində deyil, həm də hadisələr (obyektlər) arasında səbəb əlaqələrinin təyin edilməsi üsulu kimi digər çoxlu təbiət elmlərində də geniş istifadə olunur. Riyaziyyatda riyazi isbat üsulu kimi üç növ induksiya növündən istifadə edilir:

1) riyazi induksiya;
2) natamam induksiya;
3) tam induksiya.

Bu növlərin hər biri məktəb riyaziyyat kursunda həm təkliflərin, xassə və düsturların isbatı, həm də müəyyən çalışmalar həlli prosesində tətbiq edilir. [1, s.107]

Riyazi induksiya metodundan hər hansı bir fikrin (bərabərliyin, həqiqətin) natural ədədlərin bütün qiymətlərində doğruluğunu isbat etmək üçün istifadə olunur.

Tutaq ki, bütün natural $n \in N$ ədədlər üçün $A(n) = B(n)$bərabərliyinin doğruluğunu isbat etmək lazımdır. Bunun üçün

1) $n = 1$üçün $A(1) = B(1)$bərabərliyinin düzgün olduğunu yoxlayırıq, əgər doğru olarsa;
2) $n = k$ üçün $A(k) = B(k)$bərabərliyinin doğru olduğunu qəbul edirik;
3) Bundan istifadə edərək $n = k + 1$ üçün $A(k+1) = B(k+1)$bərabərliyinin doğru olduğunu göstəririk. [2, s.14]

Misal 1. Riyazi induksiya metodundan istifdə edərək, bütün natural $n \in N$ ədədlər üçün $(n^7 - n)$ ifadəsinin 7-yə böləndüyünü isbat edin.

İsbatı: $n = 1$ üçün təklif doğrudur, yəni $1^7 - 1 = 0$, 0 ədədi 7-nin bölünənidir.

1) Fərz edək ki, hər hansı ixtiyarı natural $n = k$ ədədi üçün $(k^7 - k)$ ifadəsi 7-nin bölünənidir.

2) $n=k+1$ üçün təklifin doğru olduğunu göstərək.

$$(k+1)^7-(k+1)=k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k+1-k-1=$$
$$=\left(k^7-k\right)+\left(7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k\right)$$

Birinci toplanan 7-nin bölünənidir (təklif 2). II mötərizədədə toplananların hər biri 7-ə bölündüyü üçün $(k+1)^7-(k+1)$ ifadəsi 7-nin bölünənidir.

Misal 2. İsbat edin ki, n natural ədəddirsə, onda $(4^n+15n-1)$ ifadəsi 9-a bölünür.

İsbatı: $n=1$ qiyməti üçün $4^1+15\cdot 1-1=18$, 18 ədədi 9-a bölünür.

1) $n=k$ natural ədədi üçün $4^k+15k-1$-in 9-a bölündüyünü qəbul edək.

2) $n=k+1$ ədədi üçün $4^{k+1}+15(k+1)-1$-in 9-a bölündüyünü göstərək.

$$4^{k+1}+15(k+1)-1=4\left(4^k+15k-1\right)-45k+18=4\left(4^k+15k-1\right)-9(5k-2)$$

İkinci təklifə əsasən $4^k+15k-1$ 9-a bölünür, $9(5k-2)$ ifadəsinində 9-a bölündüyü aydındır.

Misal 3. İsbat edin ki, ixtiyari natural n ədədi üçün

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{3}=2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{n+1}{6}\pi$$

bərabərliyi doğrudur. [3, s.60]

İsbatı: $n=1$ üçün

$$\sin\frac{\pi}{3}=2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

doğru bərabərliyini alarıq.

1) $n=k$ qiyməti üçün

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\ldots.+\cdot\sin\frac{k\pi}{3}=2\sin\frac{k\pi}{6}\cdot\sin\frac{k+1}{6}\pi$$

bərabərliyinin doğruluğunu qəbul edək.

2) $n=k+1$ üçün

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\ldots.+\cdot\sin\frac{k\pi}{3}+\sin\frac{(k+1)\pi}{3}=2\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\cdot\sin\frac{(k+2)\pi}{6}$$

bərabərliyinin doğru olduğunu isbat edək.

$$\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\ldots.+\cdot\sin\frac{k\pi}{3}+\sin\frac{(k+1)\pi}{3}=2\sin\frac{k\pi}{6}\cdot\sin\frac{(k+1)\pi}{6}+\sin\frac{(k+1)\pi}{3}=$$
$$=2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{(k+1)\pi}{6}+2\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\cos\frac{(k+1)\pi}{6}=2\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\left[\sin\frac{k\pi}{6}+\cos\frac{(k+1)\pi}{6}\right]=$$
$$=2\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\cdot 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{(k-1)\pi}{6}=2\sin\frac{(k+1)\pi}{6}\cdot\cos\frac{(k-1)\pi}{6}$$

İsbatı sona çatdırmaq üçün

$$\cos\frac{(k-1)\pi}{6}=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\frac{(k-1\pi)}{6}\right]=\sin\frac{(4-k)\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{(4-k)}{6}\pi\right)=\sin\frac{(k+2)\pi}{6}$$

olduğunu qeyd etmək kifayətdir.

Misal 4. İxtiyari natural n ədədi üçün

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

bərabərliyinin doğruluğunu isbat edin.

İsbatı: $n=1$ üçün bərabərlik doğrudur, belə ki,

$$1^3=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot 2^2.$$

1) $n=k$ qiyməti üçün

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{1}{4}k^2(1+k)^2$$

bərabərliyinin doğru olduğunu qəbul edək.

2) $n=k+1$ qiyməti üçün

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

bərabərliyinin doğru olduğunu isbat edək:

$$\left(1^3+2^3+3^3+...+k^3\right)+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(1+k)^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

.

Təklif isbat olundu.

Misal 5. Riyazi induksiya metodundan istifadə edərək, bütün natural $n\in N$ ədədlər üçün aşağıdakı bərabərliyin doğruluğunu isbat edin:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

İsbatı: 1) $n=1$ qiyməti üçün $1=\frac{1(1+1)}{2}\Rightarrow 1=1$ alarıq, doğrudur;

2) $n=k$ qiyməti üçün $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ bərabərliyinin doğru olduğunu qəbul edək.

3) Bundan istifadə edərək $n=k+1$ qiyməti üçün

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

bərabərliyinin doğru olduğunu isbat edək:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\Rightarrow\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(k+1)+2(k+1)=(k+1)((k+1)+1)\Rightarrow(k+1)(k+2)=(k+1)(k+2).$$

Son bərabərlik düzgündür. Bu o deməkdir ki, verilən bərabərliyin doğru olduğunu isbat etdik.

Riyazi induksiya metodunun köməyi ilə olimpiada tipli məsələlərin həllimdə də istifadə etmək əlverişli olur.

Misal 6. İxtiyari n natural ədədi üçün

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

olduğunu isbat edin. [4, s.72]

İsbatı: Əvvəlcə isbat eək ki, ixtiyari natural n ədədi üçün elə natural a və b ədədləri var ki,

$$\begin{cases}\left(1-\sqrt{2}\right)^n=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2}\\ a^2-2b^2=(-1)^n.\end{cases}$$

$n=1$ təklifin doğru olmasına inanmaq üçün $a=b=1$ götürmək kifayətdir.

$n=k$ qiyməti üçün bərabərliyin doğru olduğunu qəbul edək. Onda $n=k+1$ qiyməti üçün

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1}=\left(1-\sqrt{2}\right)^k\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)=\left(a-b\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)=$$

$$=(a+2b)-(a+b)\sqrt{2}=\sqrt{(a+2b)^2}-\sqrt{2(a+b)^2}=\sqrt{a_1^{\,2}}-\sqrt{2b_1^{\,2}},$$

burada a_1 və b_1 – natural ədədlərdir.

$$a_1^{\,2}-2b_1^{\,2}=(a+2b)^2-2(a+b)^2=-a^2+2b^2=-\left(a^2-2b^2\right)=(-1)^{n+1}.$$

Beləliklə, $n=k+1$ olduqda təklif isbat olundu. Riyazi induksiya metodundan istifadə göstərə bilərik ki, ixtiyari natural n ədədi üçün təklif doğrudur.

Məsələnin doğruluğu isbatı verilmiş təklifdən asanlıqla alınır. Doğrudan da n cüt ədəddirsə, onda

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \left(1-\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{a^2} - \sqrt{2b^2},$$

burada a,b həmçinin a^2, $2b^2$– natural ədədlərdir və $a^2 - 2b^2 = 1$.

Əgər n tək ədəddirsə, onda

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = -\left(1-\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{2b^2} - \sqrt{a^2},$$

burada $2b^2$, a^2 - natural ədədlərdir və

$$2b^2 - a^2 = -\left(a^2 - 2b^2\right) = -(-1) = 1.$$

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Feyziyev S.A., Şükürov R.Y. Riyaziyyatın ibtidai kursunun nəzəri əsasları. Bakı: ADPU-nun mətbəəsi, 2012, 565 s.
2. Şıxəliyev L.Ə. Ədədlər nəzəriyyəsi, I hissə. Bakı: Ecoprint, 2018, 85 s.
3. Дорофеев Т.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике. М.: Наука, 1970, 640 с.
4. Стратевия С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. М.: Мир, 1978, 337 с.
5. Çərkəzov S.M. İsbat məsələləri həllinin axtarılması yolları / Azərbaycan Respublikasının Təhsil İnstitutunun Elmi əsərləri, 2021, cild 88, № 6, s.122-126

M.N.Mammadov
Mingachevir State University

S.I.Yusifova
Mingachevir State University

Some applications of mathematical induction method

Abstract

The article devoted to the proof of some typical inequalities of mathemeatical induction method in teaching mathematic by solving the problems of olimpics character. The aim is to raise the pipils ‘interest to mathematics and to achieve the students’ succesful solution of highly difficult exercises insubject olimpiads by using this method.

Keywords: *mathematics, mathematical induktion method, equality, natural figures, it’s true*

М.Н.Мамедов
Мингячевирский государственный университет

С.И. Юсифова
Мингячевирский государственный университет

Некоморые применения метода математической индукции

В статье на примерах показаны применения метода математической индукции к доказателъствам ряда типичных равенств и решению упражнеий олимпиадного характера в ироцессе прподавания математики. Целъ работы – содействоватъ повышению интереса учащихся к математике и добитъся успешного решения ими задач повышенкой трудности на предметных олимпиадах, исполъзуя указанный метод.

***Ключевые слово*:** *математика, метод математической индукции, равенство, натуралъные числа, верно*

Elmi redaktor: f.-r.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 01.04.2022
Çapa qəbul edilib: 14.04.2022