UOT 517.2/.3

TÖRƏMƏ VƏ İBTİDAİ FUNKSİYANIN İFADƏLƏRİN ÇEVRİLMƏLƏRİNƏ TƏTBİQİ

Vaqif Şahismayil oğlu Abdullayev
Mingəçevir Dövlət Universiteti
vaqif.abdullayev@mdu.edu.az

Sabir Nəriman oğlu Babuşov
Mingəçevir Dövlət Universiteti
sabir.babushov@mdu.edu.az

Xülasə

Məqalədə törəmənin tətbiqi ilə bir sıra mürəkkəb, adi yollarla həll olunmayan, çalışmaların orijinal həlli üsulları göstərilmişdir. Törəmə anlayışına istinad edilərək bəzi çətinliyi yüksək olan çalışmaların vuruqlarına ayrılması qaydaları ətraflı izah olunmuşdur. Cəbri və triqonometrik ifadələrin hasil şəklində yazılması, ənənəvi üsullardan fərqli olaraq, riyazi analiz fənninin törəmə və ibtidai funksiya bölmələrinə əsaslanmışdır. Məqalədə bir neçə dəyişənli funksiyanın xüsusi törəməsi anlayışından məqsədyönlü istifadə edilərək, onun bir sıra mürəkkəb çalışmalara tətbiq qaydaları açıqlanmışdır.

Açar sözlər: *törəmə, böhran nöqtəsi, vuruqlar, ibtidai funksiya, xüsusi törəmə, cəbri və triqonometrik ifadələr, diferensial*

Həm riyaziyyat, həm də elm və texnikanin bir cox məsələlərinin tədqiqində törəmə anlayışı mühüm yer tutur. Məlumdur ki, törəmə anlayışının əsas məqsədi onun funksiyaların araşdırılmasına tətbiqidir. Törəmə anlayışından istifadə edərək, funksiyanın artma və azalma aralıqlarını, onun stasionar (böhran) nöqtələrini və s. tapmaq olar. Törəmə anlayışının sferasını genişləndirərək onu müxtəlif növ çalışmalara, ifadələrin çevrilmələrinə tətbiq edə bilərik. Bu məqsədlə biz törəmənin bir sıra çalışmalara o cümlədən, cəbri və triqonometrik ifadələrin çevrilmələrinə, xüsusi halda ifadələrin vuruqlara ayrılmasına, sadələşdirilməsinə tətbiqini öyrənək. Bu üsul ona əsaslanır ki, törəmə bu halda əhəmiyyətli dərəcədə sadə halda istifadə olunur. Axtarılan funksiyanın ibtidai funksiyası asanlıqla tapılır və verilən ifadənin ibtidai funksiyası olur.

Qeyd edək ki, bu halda verilmiş ifadə bir neçə dəyişəndən asılı olur, ona görə də diferensiallamada faktiki olaraq xususi törəmədən söhbət gedir. Belə metodik yanaşmalar orta məktəb riyaziyyat kursundan kənara çıxır.

Yuxarıda dediklərimizə istinad edərək bir neçə misal həlli nümunələrinə baxaq.

Misal 1. $x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$ ifadəsini vuruqlarına ayırın [1, s.64].

Həlli: Burada x-i dəyişən, y və z-i sabit (parametr) qəbul edək və verilmiş ifadəni $f(x)$ ilə işarə edək:

$$f(x)=x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2) \tag{1}$$

İndi $f(x)$-in x-ə nəzərən törəməsini tapaq:

$$f'(x)=y^2-z^2-2xy+2xz=2x(z-y)+(y-z)(y+z)=$$
$$=(y-z)(y+z-2x);$$
$$f'(x)=(y-z)(y+z-2x).$$

Buradan

$$f(x)=(y-z)[(y+z)x-x^2]+C \tag{2}$$

alarıq, burada C-sabitdir. C-ni tapmaq üçün (1) və (2) münasibətlərini bərabərləşdirək:

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=(y-z)[(y+z)x-x^2]+C$$

$x=0$ qəbul edək. Onda

$$yz^2-zy^2=C$$

olar. Beləliklə alarıq:

$$f(x) = (y-z)[(y+z)x - x^2] + yz(z-y) =$$
$$= (y-z)\big((y+z-x)x - yz\big) = -(y-z)(x^2 - xy - xz + yz) = -(y-z)\big(x(x-z) - y(x-z)\big) = -(y-z)(x-y)(x-z) = (z-y)(x-y)(x-z);$$
$$f(x) = (z-y)(x-y)(x-z).$$

Bu misalı standart üsullarla törəmədən istifadə etmədən də vuruqlarına ayırmaq olar. Məsələn, verilmiş ifadəni x-ə nəzərən kvadrat üçhədli hesab edərək, kvadrat üçhədli kimi vuruqlarına ayıra bilərik. Ona görə də verilmiş $x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2)$ ifadəsini aşağıdakı kimi çevirək:

$$x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2) = \ = (z-y)x^2 - (z^2-y^2)x + yz(z-y)$$

Burada $a = z - y$, $b = -(z-y)(z+y)$, $c = yz(z-y)$ olduğu üçün

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

düsturundan istifadə edək və Viyet teoreminə əsasən:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = z + y, \\ x_1 \cdot x_2 = yz. \end{cases}$$

Buradan alınır ki, $x_1 = z, x_2 = y$ və ya $x_1 = y, x_2 = z$.

Ona görə də:

$$(z-y)x^2 - (z-y)(z+y)x + yz(z-y) = (z-y)(x-y)(x-z).$$

Növbəti misallarda da seçilmiş ifadələrə yenə kvadrat üçhədli kimi baxmaq olar. Ancaq eyni zamanda onun aşkar şəkildə göstəmək kifayət qədər çətin hesablamalar tələb edir. Ona görə də törəmədən istifadə etməklə vuruqlarına ayırmaq hesablama nöqteyi-nəzərdən daha asan olur.

Misal 2. $[(a-c)^2 + (b-d)^2](a^2+b^2) - (ad-bc)^2$ ifadəsini vuruqlarına ayırın [1, s.8].

Həlli: Verilmi ifadədə c hərfi ən kiçik qüvvətdən iştirak etdiyi üçün onu dəyişən, a, b və d-ni isə sabit (parametr) qəbul edərək,

$$f(c) = [(a-c)^2 + (b-d)^2](a^2+b^2) - (ad-bc)^2 \qquad (3)$$

funksiyasına baxaq. Buradan

$$f'(c) = -2(a-c)(a^2+b^2) + 2(ad-bc)\text{в€™}b =$$
$$= -2a^3 - 2ab^2 + 2a^2c + 2b^2c + 2abd - 2b^2c =$$
$$= -2a^3 - 2ab^2 + 2a^2c + 2abd = 2a(ac - b^2 + bd - a^2)$$

alarıq. Ona görə də

$$f(c) = (ac - b^2 + bd - a^2)^2 + C \qquad (4)$$

olar. Burada C ifadəsi yalnız a, b və d-dən asılıdır. (3) və (4) münasibətlərinə əsasən

$$[(a-c)^2 + (b-d)^2](a^2+b^2) - (ad-bc)^2 = (ac - b^2 + bd - a^2)^2 + C$$

alarıq.

$c = a$ götürsək,

$$(b-d)^2(a^2+b^2) - (ad-ab)^2 = (a^2 - b^2 + bd - a^2)^2 + C;$$
$$(b-d)^2(a^2+b^2-a^2) - b^2(b-d)^2 = C$$

olar. Buradan $C = 0$ alınar.

Beləliklə, verilmiş ifadə $(ac - b^2 + bd - a^2)^2$ ifadəsinə bərabərdir, yəni

$$[(a-c)^2 + (b-d)^2](a^2+b^2) - (ad-bc)^2 = (ac - b^2 + bd - a^2)^2 .$$

Misal 3. $cos^2x + cos^2(x+y) - 2cosxcosycos(x+y)$ ifadəsini vuruqlarına ayırın [2, s.83].

Həlli: x-i dəyişən, y-i sabit qəbul edərək, verilmiş ifadəni $f(x)$ ilə işarə edək:

$$f(x) = cos^2x + cos^2(x+y) - 2cosxcosycos(x+y).$$

$f(x)$-in x-dən asılı törəməsini tapaq:

$$f'(x) = -2sinxcosx - 2\,sin(x+y)\,cos(x+y)$$
$$- 2cosy[-sinxcosx(x+y) - cosxsin(x+y)]$$

Sadələşdirmədən sonra alırıq ki, $f'(x) = 0$.

Buradan alarıq ki, $f(x) = C$. Buna görə də

$$cos^2x + cos^2(x+y) - 2cosxcosycos(x+y) = C$$

olar. Bu münasibətdə $x = \frac{\pi}{2}$ - y götürsək,

$$C = cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{2} - y + y\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)cosycos\left(\frac{\pi}{2} - y + y\right) == sin^2y,$$

$$C = sin^2y$$

alarıq. Beləliklə:

$$cos^2x + cos^2(x+y) - 2cosxcosycos(x+y) = sin^2y.$$

Yuxarıda baxdığımız misallara əsasən, qeyd edə bilərik ki, C inteqrallama sabitinin tapılmasında dəyişənin qiymətini elə seçməliyik ki, diferensiallama zamanı mümkün olan kifayət qədər sadə nəticələr alınsın. Belə qiymətlərin seçilməsi riyaziyyat həvəskarlarinin geniş zəka mühakımələrındən çox asılıdır.

Misal 4. $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$ ifadəsini vuruqlarına ayırın [3, s.65].

Həlli: x-i dəyişən, y və z-i sabit (parametr) qəbul edərək, verilmiş ifadəni $f(x)$ ilə işarə edək:

$$f(x) = x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) \qquad (5)$$

$f(x)$ funksiyasının x-ə nəzərən törəməsini tapaq:

$$f'(x) = 3x^2(y-z) - y^3 + z^3$$

Buradan

$$f(x) = x^3(y-z) - (y^3 - z^3)x + C \qquad (6)$$

alarıq. C inteqrallama sabiti ancaq y və z-dən asılıdır.

(5) və (6) münasibətlərinə əsasən

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = x^3(y-z) - (y^3 - z^3)x + C$$

olar. Bu bərabərlikdə $x = 0$ götürsək

$$C = y^3z - z^3y$$

alınar. Onda

$$f(x) = x^3(y-z) - (y^3 - z^3)x + yz(y^2 - z^2)$$
$$= (y-z)(x^3 - xy^2 - xyz - xz^2 + y^2z + yz^2)$$

olar. $x^3 - xy^2 - xyz - xz^2 + y^2z + yz^2$ ifadəsini vuruqlara ayırmaq üçün, y-i dəyişən, x və z-i sabit hesab edərək, onu $g(y)$ ilə işarə edək:

$$g(y) = x^3 - xy^2 - xyz - xz^2 + y^2z + yz^2$$

$g(y)$ funksiyasının y-ə nəzərən törəməsini tapaq:

$$g'(y) = -2xy - xz + 2yz + z^2.$$
$$g'(y) = 2y(z-x) + z(z-x)$$

olduğu üçün

$$g(y) = y^2(z-x) + z(z-x)y + C_1$$

olar. C_1-i tapmaq üçün $y = 0$ qəbul edək.

$$g(0) = C_1 \qquad \text{və} \qquad g(0) = x^3 - xz^2$$

olduğu üçün $C_1 = x^3 - xz^2$ alınar. Beləliklə:

$$g(y) = y^2(z-x) + z(z-x)y + x(x-z)(x+z) =$$
$$= (z-x)(y^2 + zy - x^2 - xz) = (z-x)(y-x)(y+x+z);$$
$$g(y) = (z-x)(y-x)(y+x+z).$$

Nəhayət:

$$f(x) = (y-z)(z-x)(y-x)(y+x+z)$$

alırıq.

Misal 5. İfadəni sadələşdirin [3, s.65]:

$$(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$$

Həlli: a-nı dəyişən, b və c-ni sabit qəbul edib, verilmiş ifadəni $f(a)$ ilə işarə edək:

$$f(a) = (a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 \qquad (7)$$

$f(a)$ funksiyasının a-dan asılı törəməsini tapaq:

$$f'(a) = 3(a+b+c)^2 - 3(a+b-c)^2 + 3(b+c-a)^2 - 3(c+a-b)^2 == 3[(a+b+c)^2 - (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 - (c+a-b)^2] = 3[4c(a+b) - 4c(a-b)] = 3(4ac + 4bc - 4ac + 4bc) = 24bc$$

Buradan alırıq ki,

$$f(a) = 24abc + C. \quad (8)$$

(7) və (8) münasibətlərinə əsasən

$$(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 = 24abc + C$$

olar. $a = 0$ qəbul etsək,

$(b+c)^3 - (b-c)^3 - (b+c)^3 - (c-b)^3 = C <=> C = 0$ alarıq.

Nəhayət:

$$(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 = 24abc.$$

Misal 6. $(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$ ifadəsini sadələşdirin [4, s.38].

Həlli: x-i dəyişən , y və z-i sabit hesab edək və verilmiş ifadəni $f(x)$ ilə işarə edək:

$$f(x)=(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+x)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x) \quad (9)$$

$f(x)$ funksiyasının x-ə nəzərən xüsusi törəməsini tapaq:

$$f'(x) = 3(x+y)^2 + 3(z+x)^2 - 3(y+z)(z+x+x+y) = 6x^2 - 6yz$$

Buradan

$$f(x) = 2x^3 - 6xyz + C \quad (10)$$

alarıq. (9) və (10) bərabərliklərində $x = 0$ yazsaq

$$f(0) = y^3 + (y+z)^3 + z^3 - 3yz(y+z);\ \ f(0) = C$$

alınar. Beləliklə,

$$C = y^3 + (y+z)^3 + z^3 - 3yz(y+z) = 2y^3 + 2z^3$$

olar. Nəhayət

$$f(x) = 2x^3 - 6xy^2 + 2y^3 + 2z^2 = 2(x^3 + y^3 + z^2 - 3xyz)$$

tapılar.

Misal 7. $(b-c)^3 - (a-c)^3 + (a-b)^3$ ifadəsini hasil şəklində göstərin [3, s.64].

Həlli: a-nı dəyişən, b və c-ni sabit hesab edərək, verilmiş ifadəni $f(a)$ ilə işarə edək:

$$f(a)=(b-c)^3 - (a-c)^3 + (a-b)^3. \quad (11)$$

$f'(a)$ törəməsini tapaq və sadələşdirək:

$$f'(a) = -3(a-c)^2 + 3(a-b)^2 = 3(a-b-a+c)(a-b+a-c) = 3(c-b)(2a-b-c).$$

Buradan

$$f(a)= 3(c-b)(a^2 - ab - ac) + C \quad (12)$$

alarıq. (11) və (12) münasibətlərinə əsasən

$$3(c-b)(a^2 - ab - ac) + C \qquad =(b-c)^3 - (a-c)^3 + (a-b)^3$$

olar. $a = 0$ qəbul edək. Onda:

$$C = (b-c)^3 + c^3 - b^3 = (b-c)^3 - (b^3 - c^3) = (b-c)^3 - (b-c)(b^2 + bc + c^2) =$$
$$= (b-c)((b^2 - 2bc + c^2 - b^2 - bc - c^2) = -3bc(b-c)=3bc(c-b)$$

C-nin bu qiymətini (12) bərabərliyində nəzərə alaq:

$$f(a) = 3(c-b)(a^2 - ab - ac) + 3bc(c-b) == 3(c-b)(a^2 - ab - ac + bc) =$$
$$= 3(c-b)[a(a-b) - c(a-b)] = 3(c-b)(a-b)(a-c).$$

Deməli,

$$(b-c)^3 - (a-c)^3 + (a-b)^3 = 3(c-b)(a-b)(a-c)$$

alarıq.

Misal 8. $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ ifadəsini hasil şəklində göstərin [1, s.7].

Həlli: x-i dəyişən, z və y-i parametr qəbul edərək, verilmiş ifadəni $f(x)$ ilə işarə edək:

$$f(x) = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3. \quad (13)$$

$f(x)$-in x-dən asılı xüsusi törəməsini tapaq və sadələşdirək:

$$f'(x) = 3(x+y+z)^2 - 3x^2 = 3(x+y+z-x)(x+y+z+x) = 3(y+z)(2x+y+z).$$

Buradan:

$$f(x) = 3(y + z)(x^2 + yx + zx) + C. \tag{14}$$

(13) və (14) münasibətinə görə:

$$3(y + z)(x^2 + yx + zx) + C = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

$x = 0$ qəbul etsək,

$$C = (y + z)^3 - (y^3 + z^3) = (y + z)(y^2 + 2yz + z^2 - y^2 + yz - z^2) = 3yz(y + z)$$

alarıq. C-nin bu qiymətini (14) bərabərliyində nəzərə alaq:

$$f(x) = 3(y + z)(x^2 + yx + zx) + 3yz(y + z) = 3(y + z)(x^2 + yx + zx + yz) =$$
$$= 3(y + z)[x(x + y) + z(x + y)] = 3(y + z)(x + y)(x + z).$$

Elmi yenilik: Törəmə və ibtidai funksiya anlayışlarından istifadə edərək, bəzi çətinliyi yüksək olan çalışmaların asan yolla həlli yollarını göstərməklə problemləri aradan qaldırmaqdır.

Tətbiqi əhəmiyyəti: Qazanılmış bilikləri nisbətən mürəkkəb çalışmaların həllinə səmərəli tətbiq etmək, yuxarıdakı kimi problemlərin ənənəvi üsullarla həll olunmadığını və ya həllinin çox çətin olduğunu göstərməkdir.

İstifadı edilmiş ədəbiyyat

1. Кречмар В.А. Задачник по алгебре. М.: Наука, 1968, 416 с.
2. Сивашинский И.Х. Пособие по математике для техникумов. М: Высшая школа, 1970, 448 с
3. Ляпин С.Е., Баранова И.В., Борчугова З.Г. Сборник задач по элементарной алгебре. М.: Просвещение,1973, 351 с.
4. Kərimov N.B., Quliyev Ə.F., Mirzəyev V.S. Beynəlxalq riyaziyyat olimpiadaları (1959-1997). Bakı: Bakı Universiteti, 1998, 262 s.

V.Sh.Abdullayev
Mingachevir State University

S.N.Babushov
Mingachevir State University

Application of derivatives and primitive function on transformation of expressions

Abstract

The article shows the ways of original sollution of problems that are not solved by usual ways by applying the derivatives. It also thoroughly explains the rules of breaking into multipliers of highly complicated exercises basing upon the concept of derivatives. Writing of algebraic and trigonometric expressions in the form of sum is based upon the derivatives and section of primary function. The article also reveals the ways of application by purposeful use of the concept of derivatives having several variables in mathematical analysys.

Keywords: *derivative, crisis point, multipliers, initial function, special derivative, algebraic and triqonometric expressions, differential*

Применение производной и первообразной функции к преобразованию выражений

В.Ш.Абдуллаев
Мингячевирский государственный университет

С.Н.Бабушов
Мингячевирский государственный университет

Резюме

В статье для ряда сложных упражнений обычные способы решения, для которых неприменимы, приведены оригинальные способы решения с применением производной.

Опираясь на понятие производной подробно изложены правила разложения на множители для некоторых упражнений повышенной трудности. Записи алгебрических и тригонометрическх выражений в виде произведения, в отличие от традиционной формы, обоснованы на понятиях производной и первообразной функции мачтематического анализа. В статье целесообразным использованием понятия частной производной функции от нескольких переменных объяснены правила применения его к ряду сложных задач.

Ключевые слова: *производная, критическая точка, множители, первообразная, частная производная, алгебрические и тригонометрические выражения, дифференциал*

Elmi redaktor: f.-r.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 17.03.2022
Çapa qəbul edilib: 01.04.2022