UOT 373.1.02:372.8

BƏZİ SONLU VƏ SONSUZ CƏMLƏRİN HESABLANMASI

Müsəllim Mövsüm oğlu Hümmətov
pedaqogika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Mingəçevir Dövlət Universiteti
musallim.hummatov@mail.ru

Xülasə: *Məqalə bəzi sonlu və sonsuz cəmlərin hesablanmasına həsr edilmişdir. Cəmlərin hesablanması zamanı elementar çevirmələrlə yanaşı diferensial hesabının metodlarından və Abel çevirməsindən istifadə olunur. Beləliklə, cəmlərin hesablanması fəndaxili inteqrasiyanın reallaşdırılması vasitəsinə cevrilir ki, bu da anlayışların və faktların dərindən öyrənilməsinə və şagirdlərin riyazi təfəkkürünün inkişafına xidmət edir.*

Açar sözlər: *cəm, inteqrasiya, ardıcıllıq, limit, funksiya, törəmə, Abel*

Giriş

Sonlu və ya sonsuz cəmlərin hesablanmasına aid çalışmalar məktəb kursunda baxılan maraqlı məsələlər sırasına aiddir. Cəmlərin hesablanması zamanı müxtəlif anlayışlardan, üsul və priyomlardan istifadə olunur ki, bu da fəndaxili inteqrasiyanın reallaşdırılmasına xidmət edir. Həmçinin cəmlərin hesablanması prosesində şagirdlərin riyazi təfəkkürü inkişaf edir, riyaziyyat elminə marağı artır və əldə olunan bilik bacarıq vərdişlər riyaziyyatın bir çox sahəsində, xüsusən sıralar nəzəriyyəsində bünövrə rolu oynayır. Əvvəlcə cəmlərin hesablanması zamanı istifadə olunan bir neçə anlayışla tanış olaq.

Cəmin tərifi və xassələri

Fərz edək ki, sonlu $a_1, a_2, ..., a_n$ ardıcıllığı verilmişdir. Bu ardıcıllığın hədlərindən düzəldilmiş aşağıdakı ifadəyə sonlu cəm deyirlər:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Sonsuz $a_1, a_2, ..., a_n, ..$ ardıcıllığının hədlərindən düzəldilmiş

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

cəminə isə sonsuz cəm (sıra) deyilir. Sonlu və sonsuz cəmləri qısa şəkildə aşağıdakı kimi işarə edirlər:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Daxil etdiyimiz cəm içarəsinin bir neşə əsas xassəsini qeyd edək:

1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

Doğrudan da:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_n + \sum_{k=1}^{n} b_n$$

2) C sabitini cəm işarəsinin xaricinə çıxarmaq olar:

$$\sum_{k=1}^{n} (C \cdot a_k) = C \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Doğrudan da,

$$\sum_{k=1}^{n}(C\cdot a_k)=(C\cdot a_1)+(C\cdot a_2)+...+C\cdot(a_n)=C\cdot(a_1+a_2+...+a_n)=C\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$$

3) C sabiti üçün: $\sum_{k=1}^{n}C=n\cdot C$

Doğrudan da:

$$\sum_{k=1}^{n}C=\underbrace{C+C+...+C}_{n\ sayda}=n\cdot C.$$

Bəzi cəmlərin hesablanması

Misal1. Aşağıdakı cəmləri hesablayın:

a) $S_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+...+n$; b) $S_n^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2$

c) $S_n^{(3)}=\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3$; d) $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot(k+1)=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)$

Həlli. a) Burada cəmin toplananları ədədi silsilə əmələ gətirir. Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturuna ($S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$) əsasən bu cəmi tapa bilərik:

$$S_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}n=1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

b) Cəm işarəsinin xassələrinə əsasən yaza bilərik:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=1}(k^3+3\cdot k^2+3\cdot k+1)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

Sonuncu bərabərlikdən:

$$2^3+3^3+4^3+...+(n+1)^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3+3\cdot S_n^{(2)}+3\cdot S_n^{(1)}+n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n+1)^3=1+3\cdot S_n^{(2)}+3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+n\Leftrightarrow S_n^{(2)}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

c) İndi də aşağıdakı bərabərliyi çevirək:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4=\sum_{k=1}(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4=\sum_{k=1}^{n}k^4+4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

Sonuncu bərabərlikdən:

$$2^4+3^4+4^4+...+(n+1)^4=1^4+2^4+3^4+...+n^4+4S_n^{(3)}+6S_n^{(2)}+4S_n^{(1)}+n$$

Axırıncı bərabərliyi saadələşdirsək və $S_n^{(2)}$ və $S_n^{(1)}$-in məlum qiymətlərini burada nəzərə alsaq, $S_n^{(3)}$ cəmini tapa bilərik:

$$S_n^{(3)}=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

Sonuncu bərabərliyi aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$S_n^{(3)}=\left[S_n^{(1)}\right]^2\Leftrightarrow 1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$$

d) Burada axtarılan S_n cəmini hesablamaq üçün cəm işaarəsinin xassələrindən və əvvəlki bəndlərdə aldığımız nəticələrdən istifadə edəcəyik:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=S_n^{(2)}+S_n^{(1)}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+4}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Sonsuz cəmlərin hesablanması

Sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi düsturunu ($S = b_1/(1-q)$) tətbiq etməklə şagirdlərə məlum olan sonsuz dövri onluq kəsrin adi kəsrə çevrilməsi qaydasını ümumiləşdirmək və əsaslandırmaq mümkün olur.

Misal 2. Dövri onluq kəsrləri adi kəsrə cevirin:a) $0,(7)$; b) $0,(23)$; c) $0,1(6)$

Həlli. a) Verilmiş onluq kəsri aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$0,(7) = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \ldots$$

Bərababərliyin sağ tərəfi birinci həddi $b_1 = 0,7$, vuruğu isə $q = 0,1$ olan sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmidir. Buna görə də

$$0,(7) = \frac{0,7}{1-0,1} = \frac{0,7}{0,9} = \frac{7}{9}.$$

b) $0,(23) = 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + \ldots = \dfrac{0,23}{1-0,001} = \dfrac{0,23}{0,99} = \dfrac{23}{99}$

c) $0,1(6) = 0,1 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + \ldots = \dfrac{1}{10} + \dfrac{0,06}{1-0,1} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{90} = \dfrac{9+6}{90} = \dfrac{16-1}{90} = \dfrac{15}{90} = \dfrac{1}{6}$.

Sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi düsturunu tətbiq etməklə daha maraqlı cəmlər hesablamaq olar.

Misal 3. $S = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6^2} + \dfrac{3}{6^3} + \ldots + \dfrac{n}{6^n} + \ldots$ cəmini hesablayın.[3, s. 174]

Həlli. Verilmiş bərabərliyin hər iki tərəfini 6-ya vuraq:

$$6S = 1 + \frac{2}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{4}{6^3} + \ldots + \frac{n}{6^{n-1}} + \ldots$$

Aldığımız bu bərabərlikdən verilmiş bərabərliyi çıxaq:

$$5S = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots + \frac{1}{6^{n-1}} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5} \Rightarrow S = \frac{6}{25} = 0,24$$

Misal 4. Ifadəni sadələşdirin: $\sqrt{8\sqrt{24\sqrt{8\sqrt{24\ldots}}}}$. [3, s. 174]

Həlli. Kökün xassələrini və sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi düsturunu tətbiq etməklə verilmiş ifadəni aşağıdakı kimi çevirək:

$$\sqrt{8\sqrt{24\sqrt{8\sqrt{24\ldots}}}} = 8^{\frac{1}{2}} \cdot 24^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \cdot 24^{\frac{1}{16}} \ldots = 8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ldots} \cdot 24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots} = 8^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}} \cdot 24^{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}} = 8^{\frac{2}{3}} \cdot 24^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{3}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ $(*)$ sırasına baxaq. Bu sıranın hədlərindən aşağıdakı kimi cəmlər düzəldək:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$$

Bu cəmlərə xüsusi cəmlər, $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ ardıcıllığına isə *xüsusi cəmlər ardıcıllığı* deyilir. Əgər xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonlu limiti varsa, onda deyirlər ki, sıra yığılandır və həmin bu limitə $(*)$ sırasının cəmi deyilir:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Əgər xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonlu limiti yoxdursa, onda deyirlər ki, sıra dağılandır.

Misal 5. Sıranın cəmini tapın: $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$

Həlli. Xüsusi cəmlər ardıcıllığının ümumi həddini tapaq:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Verilmiş sıranın cəmi: $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ olar.

Misal 6. Cəmi tapın: $1+11+11+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n\,vahid}$. [1, s. 9]

Həlli. Axtarılan cəmi S_n-lə işarə edək: $S_n=1+11+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n\,vahid}$. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini 9-a vuraq. Onda:

$$9S_n=9+99+\ldots+\underbrace{999\ldots9}_{n\,doqquz}=(10-1)+\left(10^2-1\right)+\ldots+\left(10^n-1\right)=\left(10+10^2+\ldots+10^n\right)-n.$$

Sonuncu mötərizənin içərisi həndəsi silsilənin cəmidir. Onda: $9S_n=\frac{10^{n+1}-10}{9}-n.$

Buradan: $S_n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$.

Misal 7. Cəmi tapın: $S_n=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$. [1, s.9]

Həlli. Bərabərliyin hər iki tərəfini $x\neq 0$-a bölək:

$$\frac{S_n}{x}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}.$$

Bu bərabərlikdən:

$$\frac{S_n}{x}=\left(x+x^2+x^3+\ldots+x^n\right)'\Rightarrow\frac{S_n}{x}=\left(\frac{x^{n+1}-x}{x-1}\right)'\Rightarrow\frac{S_n}{x}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Buradan: $S_n=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$.

Misal 8. Cəmi hesablayın: $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}$ [1, s. 26]

Həlli. Axtarılan cəmi $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}=S_n$ ilə işarə edək və aşağıdakı funksiyaya baxaq:

$$f(x)=x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n\ \left(|x|<1\right).$$

Törəməni tapaq:

$$f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1},$$

onda $f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}=S_n$ olar. Digər tərəfdən həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturuna əsasən $f(x)=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$f'(x)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Beləliklə, axtarılan cəm $S_n=f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{n\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^n}+1}{\frac{1}{4}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$ olur.

Törəməni daha mürəkkəb cəmlərin hesablanmasına tətbiq etdikdə bəzən ikinci tərtib törəmədən istifadə etmək zərurəti yaranır.

Misal 9. Cəmi hesablayın: $S_n = 2 + 3\cdot\frac{2}{2} + 4\cdot\frac{3}{2^2} + 5\cdot\frac{4}{2^3} + ... + (n+1)\cdot\frac{n}{2^{n-1}}$ [1, s. 26]

Həlli. $f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ... + x^{n+1}; (|x| < 1)$ funksiyasına baxaq. Funksiyanın birinci və ikinci tərtib törəməsini tapaq:

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + ... + (n+1)x^n;$$

$$f''(x) = 2 + 3\cdot 2\cdot x + 4\cdot 3x^2 + 5\cdot 4\cdot x^3 + ... + (n+1)nx^{n-1}.$$

Buradan görünür ki:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = S_n = 2 + 3\cdot\frac{2}{2} + 4\cdot\frac{3}{2^2} + 5\cdot\frac{4}{2^3} + ... + (n+1)\cdot\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Digər tərəfdən həndəsi silsilənin cəmi düsturuna əsasən:

$$f(x) = \frac{x^{n+2} - x}{x-1}.$$

Bu bərabərliyi kəsrdən azad edək:

$$(x-1)f(x) = x^{n+2} - x.$$

İkinci tərtib törəməni tapmaq hesablama çətinliyi ilə əlaqədar olduğunu nəzərə alaraq, sonuncu bərabərliyi diferensiallayaq:

$$f(x) + (x-1)f'(x) = (n+2)x^{n+1} - 1.$$

Bu bərabərliyi yenidən diferensiallayaq:

$$f'(x) + f'(x) + (x-1)f''(x) = (n+2)(n+1)x^n \text{ yaxud } 2f'(x) + (x-1)f''(x) = (n+2)(n+1)x^n.$$

$x = \frac{1}{2}$ olduqda sonuncu bərabərlikdən:

$$2f'\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f''\left(\frac{1}{2}\right) = (n+2)(n+1)\frac{1}{2^n}.$$

Burada əvvəlki məsələnin nəticəsinə əsasən $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{n+3}{2^n}$ və $f''\left(\frac{1}{2}\right) = S_n$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$2\left(4 - \frac{n+3}{2^n}\right) - \frac{1}{2}S_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2^n} \Rightarrow 16 - \frac{n+3}{2^{n-1}} - S_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2^{n-1}} \Rightarrow S_n = 16 - \frac{n+3}{2^{n-1}} - \frac{(n+2)(n+1)}{2^{n-1}}$$

yaxud $S_n = 16 - \frac{n^2 + 5n + 8}{2^{n-1}}$ olur.

Elə cəmlər vardır ki, onların hesablanması üçün daha ciddi riyazi anlayışlardan istifadə etmək zərurəti yaranır. Belə anlayışlardan biri də Abel çevirməsidir. Abel çevirməsinin mahiyyətini şərh edək. Tutaq ki, (a_n) və (b_n) ədədi ardıcıllıqlardır. (B_n) və (S_n) ardıcıllıqları isə $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ düsturları ilə verilmişdir. Onda isbat etmək olar ki, istənilən n $(n \geq 2)$ natural ədədi üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$$

Misal 10. Cəmi hesablayın: $S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$ [2, s.70]

Həlli. Burada Abel çevirməsindən istifadə edəcəyik. $a_k = k$, $b_k = q^{k-1}$ qəbul edək. Onda:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n = \sum_{k=1}^{n-1}(k - k - 1)\sum_{n=1}^{k} q^{k-1} + n\cdot\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

Buradan: $S_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{q^k - 1}{q-1} + n \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = -\frac{1}{q-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} q^k + \frac{1}{q-1} \sum_{k=1}^{n-1} 1 + \frac{nq^n - n}{q-1};$

Sadələşdirsək: $S_n = -\frac{1}{q-1} \cdot \frac{q^n - q}{q-1} + \frac{n-1}{q-1} + \frac{nq^n - n}{q-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}$

Qeyd edək ki, misal 6-da baxılan cəm indi baxılan cəmin xüsusi halıdır $\left(q = \frac{1}{2} \right)$.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1.Ивлев Б.М. и др. Задачи повышенной трудности по алгебре и началом анализа: Учеб. пособие для 10-11 кл. сред. шк. М.: Просвещение, 1990, 48 с.

2. Башмаков М.И. и др. Задачи по математике. Алгебре и анализ / Под ред. Д.К.Фаддеева. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982, 192 с.

3. Tələbə Qəbulu üzrə Dövlət Komissiyası. Riyaziyyat, Test toplusu, 2015-ci il, - I hissə. Bakı: CBS Polygraphic Productıon, 2015, 262 s.

CALCULATION OF SOME FINITE AND INFINITE SUMS

M.Hummatov
Doctor of Philosophy in Pedagogy, Associate Professor
Mingachevir State University

Abstract: *The article is devoted to calculations of some finite or infinite sums. In the process of calculations, along with elementary transformations, methods of differential calculus and the Abel transformation are used. Thus, the calculation of sums becomes a way of intradisciplinary integration and serves to deep understanding and development of mathematical thinking of students.*

Keywords: *sum, integration, sequence, limit, function, derivative, Abel*

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ СУММ

М.М.Гумматов
доктор философии по педагогике, доцент
Мингячевирский государственный университет

Резюме: *Статья посвящено вычислениям некоторых конечных или бесконечных сумм. В процессе вычислений наряду с элементарными преобразованиями используются методы дифференциального исчисления и преобразование Абеля. Таким образом, вычисление сумм становится способом внутри дисциплинарное интеграции и служит глубокому пониманию и развитию математического мышления учащихся.*

Ключавые слова:*сумма,интеграция, последовательность, придел, функция, производная, Абель*

Elmi redaktor: f.-r.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 17.01.2023
Çapa qəbul edilib: 24.01.2023