UOT 512.64

ÜMUMTƏHSİL MƏKTƏBLƏRİNDƏ "TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLL ÜSULLARI"NIN TƏDRİSİ METODİKASI

Natəvan Həmdiyyə qızı Kələşova
Mingəçevir Dövlət Nniversiteti
natavan.kalashova@mdu.edu.az

Xülasə: *Məqalədə riyaziyyatın tədrisi prosesində müasir təlim üsulları nəzərə alınmaqla "Tənliklər sisteminin həlli üsulları"nın tədrisi metodikası geniş şərh olunmuş, eyni zamanda mövcud ədəbiyyatlarda məlum olan, lakin orta məktəb dərsliklərində göstərilməyən müxtəlif tənliklər sisteminin həll üsulları araşdırılmışdır. Məqsəd şagirdlərin riyaziyyata olan maraqlarını artırmaq, onların olimpiadalarda yüksək nəticələr əldə etmələrinə nail olmaqdır.*

Açar sözlər: *riyaziyyat, xətti və qeyri-xətti tənliklər sistemi, əvəzetmə üsulu, yeni dəyişən daxiletmə üsulu, cəbri toplama üsulu*

Giriş

Hazırda ümumtəhsil məktəblərinin VII sinifində xətti tənliklər sisteminin, IX sinifində isə qeyri-xətti tənliklər sisteminin həll üsulları tədris edilir. Riyaziyyat fənninin tədris proqramında qeyd etdiyim mövzuların tədrisinə çox az vaxt ayrılmışdır. [1, 2] Mövzuların tədrisinə az vaxt ayrılmasına baxmayaraq, müəllimlər elə etməlidirlər ki, şagirdlər bu qısa vaxt müddətində tənliklər sisteminin həll üsullarına aid daha çox bilik, bacarıq və vərdişlər sisteminə malik olsunlar.

Tənliklər sisteminin həll üsullarını şagirdlərə öyrətmək üçün onlara qabaqca xətti funksiya, xətti funksiyaların qrafiklərinin qarşılıqlı vəziyyəti, ikidəyişənli xətti tənliklərin necə tərtib edilməsi, ikidəyişənli xətti tənliklər sistemi analyışı və s. öyrədilir. Sonra bu anlayışlar haqqında bilik, bacarıq və vərdişlər sistemi möhkəmləndirilir.

Praktikada tənliklər sisteminin, əsasən, iki növü ilə rastlaşırıq:

a) xətti tənliklər sistemi (VII sinifdə tədris edilir);
b) qeyri-xətti tənliklər sistemi (IX sinifdə tədris edilir).

Əgər eyni dəyişənli və daha artıq tənliyin ortaq həlləri axtarılırsa, onda deyirlər ki, həmin tənliklər birlikdə tənliklər sistemi əmələ gətirir.

Tərif: Tənliklər sisteminin həlli elə qiymətlər çoxluğuna deyilir ki, həmin qiymətləri uyğun dəyişənlərin yerinə yazdıqda doğru ədədi bərabərliklər alınsın.

Tərif: Eyni məchullu iki tənliklər sisteminin həlləri çoxluğu üst-üstə düşərsə, belə tənliklər sistemi ekvivalent (eynigüclü) tənliklər sistemi adlanır.

Tərif: Əgər tənliklər sisteminə daxil olan tənliklərdən hər biri xətti tənlik olarsa, belə tənliklər sistemi xətti tənliklər sistemi adlanır.

Məsələn: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ şəklində olan sistemə iki məchullu xətti tənliklər sistemi deyilir.

Sistemin həllinin olub-olmaması ilə əlaqədar 3 hal ola bilər.

I hal: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ olarsa, sistemin yeganə həlli var.

Misal 1. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$ sistemini nəzərdən keçirək.

$\frac{3}{4} \neq \frac{4}{-3}$ olduğu üçün sistemin $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ yeganə həlli var.

II hal: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ olarsa, sistemin həlli yoxdur.

Misal 2. $\begin{cases}2x+5y=12\\4x+10y=16\end{cases}$ sistemində $\frac{2}{4}=\frac{5}{10}\neq\frac{12}{16}$ şərti ödənildiyi üçün sistemin həlli yoxdur.

III hal: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ şərti ödənilərsə, sistemin sonsuz sayda həlli olar.

Misal 3. $\begin{cases}3x+2y=13\\6x+4y=26\end{cases}$ sistemində $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{13}{26}$ şərti ödənildiyi üçün sistemin sonsuz sayda həlli vardır.

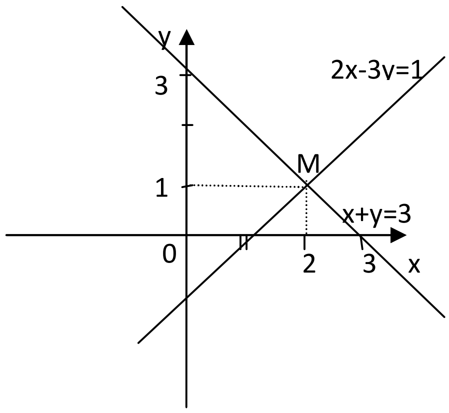
Müxtəlif ədəbiyyatlarda xətti tənliklər sisteminin aşağıdakı həll üsulları göstərilir [2, 3]:

1. Qrafik üsul.
2. Cəbri toplama üsulu.
3. Əvəzetmə üsulu.
4. Müqayisə üsulu.
5. Dəyişənlərin ardıcıl yoxetmə üsulu (Qauss üsulu).
6. Qeyri-müəyyən əmsallar üsulu.
7. Kramer qaydası.

Bu üsulların hər birindən istifadə edərək xətti tənliklər sistemini həll edək.

1. Qrafik üsul

$\begin{cases}x+y=3\\2x-3y=1\end{cases}$ sistem tənliyi qrafik üsulla həll etmək üçün sistemə daxil olan tənliklərin qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurub, kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapmaqla sisteminhəllini müəyyən etmək olar.



Şəkildən göründüyü kimi düzxətlər $M(2;1)$ nöqtəsində kəsişirlər.

Deməli, sistemin həlli $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ olar.

2. Cəbri toplama üsulu

$\begin{cases}5x-4y=2\\10x-7y=5\end{cases}$ sistem tənliyi həll etmək üçün x-in və ya y-in əmsallarının modullarını bərabərləşdirək. Bunun üçün birinci tənliyi (-2)-yə vuraq və tənlikləri tərəf-tərəfə toplayaq.

$\begin{cases}-10x+8y=-4\\10x-7y=5\end{cases}\Rightarrow$ y=1 alarıq.

onda $5x-4=2$; $5x=6$; $x=1{,}2$ Yoxlama göstərir ki, (1,2; 1) ədədlər cütü sistemin həllidir.

3. Əvəzetmə üsulu

$\begin{cases}4x-5y=7\\9x-8y=19\end{cases}$ sistem tənliyi həll etmək üçün birinci tənlikdən x-i və ya y-i təyin edib, onu ikinci tənlikdə yerinə yazaq. . [2, s. 97]

$$4x=7+5y \Rightarrow x=\frac{7+5y}{4}$$

$$9\cdot\frac{7+5y}{4}-8y=19\ ;\ 9(7+5y)-32y=76\ ;\ 63+45y-32y=76\ ;\ 13y=13;\ y=1$$

onda $x=\frac{7+5}{4}=3$ alarıq. Yoxlama göstərir ki, (3; 1) ədədlər cütü sistemin həllidir.

4. Müqayisə üsulu

$\begin{cases}3x+2y+z=5\\x+y-z=0\\4x-y+5z=3\end{cases}$ sistem tənliyi həll etmək üçün tənliklərin hər birindən eyni bir dəyişəni təyin edib bərabərləşdirək. . [3, s. 115]

$\begin{cases}x=\frac{5-2y-z}{3}\\x=-y+z\\x=\frac{3+y-5z}{4}\end{cases}$, buradan $\begin{cases}\frac{5-2y-z}{3}=-y+z\\-y+z=\frac{3+y-5z}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y-4z=-5\\5y-9z=-3\end{cases}$ sistemini alarıq. Sistemi həll edərək (3; 2) ədədlər cütünü taparıq. Onda $x=\frac{5-2\cdot3-2}{3}=-1$ olar. Yoxlama göstərir ki, (-1; 3; 2) ədədlər cütü sistemin həllidir.

Qeyd: Bu üsul praktikada çox az istifadə edilən üsuldur.

5. Dəyişənlərin ardıcıl yoxetmə üsulu

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, birinci tənlik saxlanılır, o biri tənliklərdən birinci dəyişən yox edilir, sonra birinci və ikinci tənlik saxlanılmaqla ikinci dəyişən yox edilir və proses bu qayda ilə davam etdirilir. Sonra axırıncı tənlikdən başlayaraq dəyişənlər bir-bir tapılır.

Misal 4. $\begin{cases}x+5y-0{,}5z=5\\2x+4y-2z=7\\4x+2y+3z=1\end{cases}$ sistem tənliyi həll edin. [3, s. 116]

Həlli: Birinci tənliyi uyğun olaraq (-2)-ə və (-4)-ə vurub ikinci və üçüncü tənliklərlə toplasaq x dəyişənləri yox edilir. Onda tənliklər sistemi $\begin{cases}x+5y+0{,}5z=5\\-6y-3z=-3\\-18y+z=-19\end{cases}$ şəklində olar. Burada ikinci tənliyi (-3)-ə vurub, üçüncü tənliklə toplasaq, sistem tənliyimiz aşağıdakı şəkildə olar:

$$\begin{cases}x+5y+0{,}5z=5\\-6-3z=-3\\10z=-10\end{cases}$$

Buradan tapərəq ki:

$$\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{tapılar.}$$

Yoxlama göstərir ki, (0,5; 1; -1) ədədlər üçlüyü sistem tənliyin həllidir.

6. Qeyri-müəyyən əmsallar üsulu

Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, sistemə daxil olan dəyişənlərdən birini saxlamaqla o birilərini yox etmək lazımdır. Bunun üçün birinci tənliyi λ_1-ə, ikincini λ_2-ə və nəhayət n-ci tənliyi λ_n-ə vurub, alınan tənlikləri tərəf-tərəfə toplayıb, yox etmək istədiyimiz dəyişənlərin əmsallarını sıfır götürmək lazımdır.

Misal 5. $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 20 & (\lambda_1) \\ 4x + 5y + 7z = 27 & (\lambda_2) \\ -3x - 5y + 2z = -1 & (\lambda_3) \end{cases}$ [3, s. 116]

$$(3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3)x + (4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 5\lambda_3)y + (5\lambda_1 + 7\lambda_2 + 2\lambda_3)z = 20\lambda_1 + 27\lambda_2 - \lambda_3$$

y və z dəyişənlərini yox etmək üçün dəyişənlərin əmsallarını sıfra bərabər götürək:

$\begin{cases} 4\lambda_1 + 5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 + 7\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$ alarıq. Buradan $\lambda_2 = -\frac{11}{15}\lambda_1$; $\lambda_3 = \frac{1}{15}\lambda_1$ taparıq. $\lambda_1 = 15$ qəbul etsək, $\lambda_2 = -11$; $\lambda_3 = 1$ alarıq. (λ_1-in yerinə 15-in istənilən bölünənini yazmaq olar). Qiymətləri tənlikdə nəzərə alsaq:

$$(3\cdot 15 - 4\cdot 11 - 3\cdot 1)x = 20\cdot 15 - 27\cdot 11 - 1$$

$-2x = 2$; $x = -1$; $y = 2$, $z = 3$ olduğunu taparıq.

Qeyd: Bu üsul praktikada çox az istifadə olunan üsuldur.

7. Kramer qaydası (determinantlar üsulu)

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ sisteminin əmsallarından aşağıdakı şəkildə istifadə olunan cədvəlləri (determinantları) düzəldək.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ düsturları Kramer düsturları adlanır. Burada 3 hal ola bilər.

I hal: $\Delta \neq 0$ olarsa, sistemin yeganə həlli var.

II hal: $\Delta = 0$; $\Delta_x \neq 0$; $\Delta_y \neq 0$ olarsa, sistemin həlli yoxdur.

III hal: $\Delta = 0$; $\Delta_x = 0$; $\Delta_y = 0$ olarsa, sistemin sonsuz sayda həlli olar.

Misal 6. $\begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ 6x - 7y = -8 \end{cases}$ sistem tənliyi həll edin. [4, s. 49]

Həlli: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 30 = -51$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ -8 & -7 \end{vmatrix} = -91 + 40 = -51$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -24 - 78 = -102$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-51}{-51} = 1 \;\; ; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-102}{-51} = 2\,.$$

Yoxlama göstərir ki, (1; 2) ədədlər cütü verilmiş sistemin yeganə həllidir.

Qeyri-xətti tənliklər sistemi

Qeyri-xətti tənliklər sistemi üçün ümumi həll metodu göstərmək mümkün deyil. Lakin bir sıra tənliklər sistemini qruplaşdıraraq onların ümumi həll üsullarını vermək olar. İki dəyişənli qeyri-xətti tənliklər sistemlərinin aşağıdakı həll qaydalarını nəzərdən keçirək.

1. Biri xətti, digəri qeyri-xətti (iki dərəcəli) olan tənliklər sisteminin həlli

Bu tipli tənliklər sistemini ümumi şəkildə həll etmək olur.

Misal 7. $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 4x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ sistem tənliyi həll edin. [3, s. 119]

Həlli: Bu tip sistem tənliyi həll etmək üçün xətti tənlikdən dəyişənlərdən birini tapıb, qeyri-xətti tənlikdə nəzərə almaq lazımdır (əvəzetmə üsulu).

1) $3x - y + 2 = 0$ tənliyini y -ə görə həll edək.

$y = 3x + 2$

2) $4x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x + 2y - 2 = 0$ tənliyində $y = 3x + 2$ olduğunu nəzərə alaq:

$4x^2 - 5x(3x+2) + 2(3x+2)^2 - 3x + 2(3x+2) - 2 = 0$

$4x^2 - 15x^2 - 10x + 18x^2 + 24x + 8 - 3x + 6x + 4 - 2 = 0$

$7x^2 + 17x + 10 = 0 \;;\; x_1 = -1; \quad x_2 = -\dfrac{10}{7}$

Bu qiymətləri əvəzləmədə nəzərə alsaq,

$y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1\;; \qquad y_2 = 3 \cdot \left(-\dfrac{10}{7}\right) + 2 = -\dfrac{30}{7} + 2 = -\dfrac{16}{7}$

Cavab: $(-1\,;-1)$ və $\left(-\dfrac{10}{7}\,; -\dfrac{16}{7}\right)$

2. Sol tərəfləri məchullara görə bircinsli olan tənliklər sisteminin həlli

Tərif: $f(x;y)$ funksiyası üçün $f(tx\,;ty) = t^m f(x\,;y)$ şərti ödənilərsə, onda $f(x\,;y)$ funksiyası bircinsli funksiya adlanır.

I üsul: Bircinsli tənliklər sistemini həll etmək üçün $y = tx$ əvəzləməsindən istifadə edərək, sonra tənlikləri tərəf-tərəfə bölürük.

Misal 8. $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 7 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 12 \end{cases}$ sistem tənliyi həll edin. [4, s. 53]

Həlli: Sistemin sol tərəfləri iki dərəcəli bircinsli funksiyadır. $y = tx$ əvəzləməsi aparsaq:

$$\begin{cases} x^2 + tx^2 + 2t^2x^2 = 7 \\ 2x^2 - 3tx^2 + t^2x^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 + t + t^2)x^2 = 7 \\ (2 - 3t + t^2)x^2 = 12 \end{cases}$$

Tərəf-tərəfə bölmə əməlini aparaq:

$$\frac{1 + t + 2t^2}{2 - 3t + t^2} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow \quad 12(1 + t + 2t^2) = 7(2 - 3t + t^2)$$

$12 + 12t + 24t^2 = 14 - 21t + 7t^2$

$17t^2 + 33t - 2 = 0\;,\; t_1 = \dfrac{1}{17} \;\;;\;\; t_2 = -2$

Bu qiymətləri tənlikdə nəzərə alsaq:

I hal: $t=-2$ olduqda, $7x^2=7$; $x^2=1$; $x=\pm 1$ onda $y=\mp 2$

II hal: $t=\dfrac{1}{17}$ olduqda $\left(1+\dfrac{1}{17}+\dfrac{2}{289}\right)x^2=7$, $44x^2=289$, $x=\pm\dfrac{17}{2\sqrt{11}}$

II üsul: Bu üsulun mahiyyəti sərbəst hədləri yox edib, bircins tənlik almaqdan ibarətdir.

Misal 9. $\begin{cases}2x^3+x^2y-3xy^2+y^3=-3\\ x^3+2x^2y+4xy^2-3y^3=6\end{cases}$ sistem tənliyi həll edin. [3, s. 122]

Həlli: Sistemin birinci tənliyini 2-yə vurub, ikinci tənliklə tərəf-tərəfə toplayaq:

$$+\begin{cases}4x^3+2x^2y-6xy^2+2y^3=-6\\ x^3+2x^2y+4xy^2-3y^3=6\end{cases}$$

$$5x^3+4x^2y-2xy^2-y^3=0$$

$(0\,;\,0)$ cütü sistemin həlli olmadığı üçün alınan tənliyi x^3 və ya y^3 -na bölək.

$5\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+4\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-2\dfrac{x}{y}-1=0;$ $t=\dfrac{x}{y}$ əvəzləməsi aparsaq,

$$5t^3+4t^2-2t-1=0$$

$$\left(5t^3+5t^2\right)-\left(t^2+2t+1\right)=0$$

$$(t+1)\left(5t^2-t-1\right)=0$$

$$t_1=-1\,;\quad t_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{10}$$

t-nin bu qiymətlərini əvəzləmədə yerinə yazıb, sonra sistemin hər tənliyində nəzərə alsaq, tənliyin həllərini asanlıqla tapmaq olar.

Qeyd edək ki, birinci üsul ikinci üsuldan alınır. Ona görə ki, birinci üsulda birbaşa aparılan $y=xt$ əvəzləməsinin aparılmasının qanuni olması, ikinci üsulun həll prosesindən aydındır.

3. Tənliklərin hər ikisi qeyri-xəttidir, lakin bircinsli deyil

Misal 10. $\begin{cases}x^3+y^3=9\\ xy=2\end{cases}$ sistem tənliyi həll edin. [3, s. 121]

Həlli: $\begin{cases}x^3+y^3=9\\ xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=9\\ x^3\cdot y^3=8\end{cases}$

Burada $x^3=a,\ y^3=b$ əvəzləməsi aparsaq, alarıq:

$$\begin{cases}a+b=9\\ a\cdot b=8\end{cases}$$

Sistem tənliyi həll etsək, alarıq:

$$\begin{cases}a_1=8\\ b_1=1\end{cases}\text{ və ya }\begin{cases}a_2=1\\ b_2=8\end{cases}$$

Bu qiymətləri əvəzləmədə nəzərə alsaq,

$$\begin{cases}x^3=8\\ y^3=1\end{cases}\text{ və ya }\begin{cases}x^3=1\\ y^3=8\end{cases}.$$

Buradan isə $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ və ya $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ alırıq.

Deməli, $(2;1)$ və $(1;2)$ ədədlər cütü sistem tənliyin həllidir.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. İsmayılova S. Riyaziyyat-7 (Orta məktəb üçün dərslik). Bakı: "Şərq-Qərb" ASC, 2018, 224 s.
2. Qəhrəmanova N., Kərimov M, Hüseynov İ. Riyaziyyat-9. Orta məktəb üçün dərslik. Bakı: Radius, 2019, 259 s.
3. Gülməmmədov V. Riyaziyyatdan çalışmaların həlli metodları. Bakı: Maarif, 1990, 486 s.
4. Məmmədov R., Xəlilov H., Hüseynov Ş. Tənliklər və bərabərsizliklər. Bakı: Maarif, 1991, 376 s.

METHODS OF TEACHING "METHODS FOR SOLVING A SYSTEM OF EQUATIONS" IN SECONDARY SCHOOLS

N.Kalashova
Mingachevir State University

Abstract:*In the article, taking into account modern teaching methods in the process of teaching mathematics, the methodology for teaching "Methods for solving a system of equations" is widely explained, and at the same time, the known methods for solving various systems of equations that are given in the literature, but not shown in school textbooks. The goal is to increase students' interest in mathematics, to achieve high results in various olympiads.*

Keywords: *mathematics, system of linear and nonlinear equations, substitution method, method of inserting new variables, algebraic summation method*

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ «МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ» В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛАХ

Н.Г.Калашова
Мингячевирский государственный университет

Резюме: *В статье с учетом современных методов обучения в процессе обучения математике широко разъяснены методика обучения «Методов решения системы уравнений», и в то же время известные методы решения различных систем уравнений, которые даны в литературе, но не показаны в школьных учебниках. Цель – повысить интерес учащихся к математике, добиться высоких результатов в различных олимпиадах.*

Ключевые слова: *математика, система линейных и нелинейных уравнений, метод подстановки, метод вставки новых переменных, метод алгебраического суммирования*

Elmi redaktor: r.f.d., dos. M.İsmayılova
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 08.02.2023
Çapa qəbul edilib: 15.02.2023