UOT 517.95

CIRLAŞAN ELLİPTİK TƏNLİKLƏRİN MÜSBƏT HƏLLƏRİNİN ARAŞDIRILMASI

[1,3]**Murğuzəli İslam oğlu Əliyev,** [2,3]**Gülnar Nizaməddin qızı İsgəndərova,**
[4]**Səriyə İnqilab qızı Allahverdiyeva**
[1]fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
aliyevm@list.ru
[2]fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
[3]Bakı Dövlət Universiteti
[4]sariya.allahversiyeva@mdu.edu.az
Mingəçevir Dövlət Universiteti
Bakı Dövlət Universitetinin dissertantı

Xülasə: *Məqalədə cırlaşan tənliklər üçün müsbət həllərin varlığı öyrənilir. Bunun üçün Grin funksiyası qurulur və məsələnin həlli Grin funksiyası vasitəsi ilə ifadə olunur.*
Açar sözlər: *cırlaşan elliptik tənliklər, müsbət həll, Grin funksiyası*

Giriş

Xüsusi törəməli diferensial tənliklər nəzəriyyəsi müasir riyaziyyatın inkişaf etmiş sahələrindən birirdir. Qeyd edək ki, xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsəslələri son dövrlərdə geniş tədqiq olunur. Bu sərhəd məsələlərindən cırlaşan elliptik tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələləri mühüm rol oynayır. Bu məsələlər mexanikadan və fizikadan irəli gələn məsələlərdir. Ona görə də bu tip məsələlər həm nəzəri, həm də praktiki xarakterə malikdir. Bu məsələlər son dövrlərdə geniş tədqiq olunur. [3-5]

1. Məsələnin qoyuluşu. Həllin yeganəliiyi

Tutaq ki, D oblastı sərhədi x oxunun AB parçası və $y>0$ yarımmüstəvisində yerləşən ucları A və B nöqtələrinə söykənən σ əyrisindən ibarətdir. Bu oblastda

$$yu_{yy}+u_{xx}+ku_y+f(x,y,u)=0 \tag{1}$$

tənliyinə baxaq. Burada $k<1$ – sabit, f isə öz arqumentlərinə nəzərən verilmiş funksiyadır. (1) tənliyi D oblastında elliptik olmaqla, oblastın sərhədinin AB hissəsində parobolik cırlaşır.

D olaraq normal oblast adlanan oblastı götürəcəyik. Bu oblastda σ əyrisi tənkiyi $x^2+4y=a^2$ şəklində olan və ucları $A(-a,0)$ və $B(a,0)$ nöqtələrində yerləşən əyridir.

Normal D oblastında (1) tənliyinin iki dəfə kəsilməz törəmələrə malik elə həllini tapmalı ki, bu həll qapalı $\overline{D}$ oblastında kəsilməz olsun və oblastın $\partial D=\sigma+[-a,a]$ sərhəddində verilmiş qiymətləri almış olsun.

Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki, ∂D sərhədinə sıfır qiymətləri verilmişdir.

İsbat etmək olur ki, əgər f funksiyası $(x,y)\in D$ və istənilən u üçün

$$\frac{\partial f}{\partial u}\le 0 \tag{2}$$

şərtini ödəyirsə, onda (1) tənliyi üçün Dirixle məsələsinin birdən çox həlli ola bilməz.

Əvvəlcə

$$Tu\equiv yu_{yy}+u_{xx}+ku_y=f(x.y) \tag{3}$$

tənliyinə baxaq və bu tənliiyin normal D oblastının $\partial\Omega=\sigma+AB$ sərhədində sıfra çevrilən həllini quraq. Laqranj mənada Tu operatoru ilə qoşma operator

$$T^*v\equiv yv_{yy}+v_{xx}+(2-k)u_y \tag{4}$$

operatorudur.

Məlumdur ki, [1] $k<1$ olduqda

$$g(x,y;\xi,t)=jr_1^{-2\beta}F(\beta,\beta,2\beta,1-\frac{r^2}{r_1^2}) \quad (5)$$

funksiyası (x,y) və (ξ,t) dəyişənlərinə nəzərən $T^*v=0$ tənliyinin həllidir və $x=\xi, y=t>0$ nöqtəsində loqarifmik məxsusiyyəti var, burada

$$\left.\begin{matrix} r_1^2 \\ r^2 \end{matrix}\right\}=(x-\xi)^2+4\left(\sqrt{y}\pm\sqrt{t}\right)^2, \ \beta=\frac{3}{2}-k,$$

F – hiperhəndəsi funksiya, j isə hər hansı ədəddir.

(3) və (4) bərabərliklərində istifadə edərək, göstərək ki,

$$T(y^{1-k}u)=y^{1-k}T^*u \quad (6)$$

münasibəti doğrudur.

$$T(y^{1-k}u)=y(y^{1-k}u)_{yy}+y^{1-k}u_{xx}+k(y^{1-k}u)_y=$$
$$=y\left[(1-k)y^{-k}u+y^{1-k}u_y\right]_y+y^{1-k}u_{xx}+$$

$$+k\left[(1-k)y^{-k}u+y^{1-k}u_y\right]=y\left[-k(1-k)y^{-k-1}u+\right.$$
$$\left.+(1-k)y^{-k}u_y+y^{1-k}u_{yy}\right]+y^{1-k}u_{xx}+k(1-k)y^{-k}u+$$
$$+ky^{1-k}u_y=y^{2-k}u_{yy}+2(1-k)y^{1-k}u_y+y^{1-k}u_{xx}=$$
$$=y^{1-k}\left[yu_{yy}+u_{xx}+(2-k)u_y\right]=y^{1-k}T^*u$$

(6) bərabərsizliyindən alınır ki, (5) bərabərliyi ilə təyin olunmuş $g(x,y;\xi,t)$ funksiyası üçün $y^{1-k}g(x,y;\xi,t)$ funksiyası (x,y) dəyişənlərinə nəzərən $Tu=0$ tənliyinin həllidir. Digər tərəfdn göstərmək olar ki, $w(x,y)$ funksiyası $T^*w=0$ tənliyinin həllidirsə, onda

$$v(x,y)=\left(\frac{R}{a}\right)^{2k-3}w\left(\frac{a^2x}{R^2},\frac{a^4y}{R^4}\right), R^2=x^2+4y$$

funksiysı da $T^*v=0$ tənliyinin həllidir. Bu isə o deməkdir ki,

$$y^{1-k}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k-3}g\left(x,y;\frac{a^2\xi}{\rho^2},\frac{a^4t}{\rho^4}\right), \ \rho^2=\xi^2+4t$$

funksiyası da (ξ,t) dəyişənlərinə nəzərən $T^*v=0$ tənliyi, (x,y) dəyişənlərinə nəzərən isə $Tu=0$ tənliyini ödəyəcək.

2. Grin funksiyasının qurulması. Həllin varlığı və yeganəliyi.

İndi

$$G(x,y;\xi,t)=y^{1-k}g(x,y;\xi,t)-y^{1-k}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k-3}g\left(x,y;\frac{a^2\xi}{\rho^2},\frac{a^4t}{\rho^4}\right) \quad (7)$$

funksiyası düzəldək [2].

Bu funksiya aşağıdakı xassələri ödəyir:

1) $(x,\ y)$ dəyişənlərinə nəzərən $Tu=0$ tənliyini, (ξ,t) dəyişənlərinə nəzərən $T^*v=0$ tənliyini ödəyir.

2) $x=\xi,\quad y=t>0$ nöqtəsində loqarifmik məxsusiyyəti var;

3) $(x,y)\in\sigma$ və $y=o$ üçün $G=0$

Asanlıqla göstərmək olar ki, hissə-hissə hamar sərhədi olan D oblastı üçün

$$\iint_{D_1}\left(vTu-uT^*v\right)d\xi dt=\int_{\Gamma_1}\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)dt-\int_{\Gamma_1}\left[t\left(v\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial v}{\partial t}\right)+(k-1)uv\right]d\xi \qquad (8)$$

Grin düsturu doğrudur. Normal oblastın ixtiyarı daxili nöqtəsinin kiçik ε ətrafını ayıraq:

$$d_\varepsilon:(x-\xi)^2+4\left(\sqrt{y}-\sqrt{t}\right)^2\leq\varepsilon \text{ və } D-d\varepsilon$$

oblastına (8) düsturunu tətbiq edək.

Bu zaman u funksiyası olaraq (3) tənliyinin ∂D üzərində sıfra bərabər olan həlli $v(\xi,t)$ olaraq, $G(x,y;\xi,t)$ götürək. Bu bərabərlikdə $e\to 0$ şərtilə limitə keçsək,

$$u(x,y)=-\iint_D G(x,y;\xi,t)f(\xi,t)d\xi dt \qquad (9)$$

alarıq.

Lemma. Əgər $F(x,y)$ funksiyası $\overline{D}$ oblastında kəsilməz, D oblastında kəsilməz törəmələrə malikdirsə, onda (9) bərabərliyinin təyin etdiiyi $u(x, y)$ funksiyası (3) tənliyinin ∂D sərhədində sıfra bərabər olan həllidir.

(9) bərabərliyi ilə təyin olunan funksiyanın (3) tənliyini ödəməsi və σ sərhədi üzərində sıfra çevrilməsi potensiallar nəzəriyyəsində olan kimi göstərilir. Göstərək ki, (9) bərabərliyi ilə təyin olunan $u(x,y)$ funksiyası $y=0$ olduqda sıfra çevrilir. (9) bərabərliyində G əvəzinə (7) ifadəsini yazsaq inteqral iki inteqrala bölünür. Bu bərabərliyin ikinci inteqralı $y\to 0$-da y^{1-k} kimi sıfra yaxınlaşır. Birinci toplanana uyğun inteqrala baxaq:

$$J(x,y)=y^{1-k}\iint_D g(x,y;\xi ç t)f(\xi,t)d\xi dt\,.$$

(5) ifadəsini nəzərə alsaq,

$$|J|\leq j\mathrm{M}y^{1-k}\int_d r_1^{-2\beta}\left|F(\beta,\beta,2\beta,1-\frac{r^2}{r_1^2})\right|d\xi dt$$

yaza bilərik, burada

$$\mathrm{M}=\max_{\overline{D}}|f(x,y)|\,.$$

Kafi qədər kiçik y-lər üçün

$$|J|\leq O(1)y^{1-k}\iint_D r_1^{-2k-3}d\xi dt$$

Qiymətləndirməsi doğrudur. Buradan alırıq:

$$|J_1|\leq a(1)y^{1-k}\int_0^{\frac{a^2}{4}}\left\{\int_{-\sqrt{a^2-4t}}^{\sqrt{a^2-4t}}\left[(x-\xi)^2+4\left(\sqrt{y}+\sqrt{t}\right)^2\right]\frac{2k-\xi}{2_{d\xi}}\right\}dt$$

Burada

$$\xi=x+2\left(\sqrt{y}+\sqrt{t}\right)\lambda$$

əvəz etsək, alarıq:

$$|J|\leq O(1)y^{1-k}\int_0^{a^2/4}\left(\sqrt{y}+\sqrt{t}\right)^{2k-2}\times\left\{\int_{\frac{-x+\sqrt{a^2-4t}}{2(\sqrt{y}+\sqrt{t})}}^{\frac{-x+\sqrt{a^2-4t}}{2(\sqrt{y}+\sqrt{t})}}(1+\lambda)^{\frac{2k-3}{2}}d\lambda\right\}dt\leq$$

$$\leq O(1)y^{1-k}\int_{-\infty}^{\infty}(1+\lambda^2)^{\frac{2k-3}{2}}d\lambda\int_0^{a^2/4}\left(\sqrt{y}+\sqrt{t}\right)^{2k-2}dt\leq O(1)y^{1-k}\int_{\sqrt{y}}^{\frac{a}{2}+\sqrt{y}}z^{2(k-1)}(z-\sqrt{y})dz$$

Bir sözlə,

$$|u| \le \begin{cases} O(1)(y^{1-k}+y) & k \ne 0 \\ O(1)(y\ln y + y) & k = 0 \end{cases}.$$

Bununla, lemma isbar olunur.

Lemmanın köməyilə (1) tənliyinin oblastın sərhədində sıfra bərabər olan Dirixle məsələsinin həllini

$$u(x,y) = -\iint_D G(x.y;\xi,t)f(\xi,t;u)d\xi dt \tag{10}$$

şəklində yaza bilərik.

Teorem. Normal D oblastında $(x,y)\in D$ və ixtiyari u üçün $\frac{\partial f}{\partial u} \le 0$ və $f(x,y,u) \le 0$ şərtləri daxilində (1) tənliyi üçün Dirixle məsələsinin yeganə müsbət həlli var.

Nəticə

İşdə cırlaşan elliptik tənlik Dirixle məsələsinə baxılır. Burada baxılan məsələnin cırlaşan tənliklər üçün müsbət həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Алиев М.И. Задача Дирихле для вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений // ДУ, 3 , № 1, (1967)

2. Кароль И.Л. К теории краевых задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа // Матем. сб. 38(80), № 3, с.261-281 (1956)

3. Манапова А.Р. О конечно-разностном методе решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с условиями неидеального контакта //Вестник Башкирского университета, 2015, Т. 20, № 3

4. Lubyshev F.V. Finite difference approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions // Comp. Math. and Math. Physics. 2012, Vol. 52. No. 8, pp. 1094–1114. DOI:10.1134/S0965542512080088

5. Manapova A.R., Lubyshev F.V. Accuracy estimate with respect to state of finite-dimensional approximations for optimization problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions // Ufa Mathematical Journal. 2014, Vol. 6. No. 3, pp. 69–84. DOI: 10.13108/2014-6-3-69

INVESTIGATION OF POSITIVE SOLUTIONS OF DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS

[1,3]M.Aliyev, [2,3]G.Isgenderova, [4]S.Allahverdiyeva

[1]Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, Associate Professor

[2]Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics

[3]Baku State University

[4]Mingachevir State University

Abstract: *In the article, the existence of a positive solution of reducing equations is studied. For this, the Green's function is constructed, and the solution to the problem is expressed using the Green's function.*

Keywords: *complex elliptic equations, positive solution, Green's function*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ КРУГОВЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

[1,3]М.И.Алиев, [2,3]Г.Н.Исгендерова, [4]С.И.Аллахвердиева
[1]доктор философии по физико-математике, доцент
[2]доктор философии по физико-математике
[3]Бакинский государственный университет
[4]Мингячевирский государственный университет

Резюме: *В статье изучается существование положительного решения уменьшительных уравнений. Для этого строится функция Грина, и решение задачи выражается с помощью функции Грина.*

Ключевые слова: *сложные эллиптические уравнения, положительное решение, функция Грина*

Elmi redaktor: f.-r.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 19.02.2024
Çapa qəbul edilib: 26.02.2024