UOT 517.2/.3

VEKTORLARIN SKALYAR HASİLİNİN BƏZİ OLİMPİADA TİPLİ ÇALIŞMALARA TƏTBİQİ

[1,3]**Vaqif Şahismayıl oğlu Abdullayev**, [2,3]**Sabir Nəriman oğlu Babuşov**
[1]vaqif.abdullayev@mdu.edu.az
[2]sabir.babushov@mdu.edu.az
[3]Mingəçevir Dövlət Universteti

Xülasə: *Məqalədə vektorların skalyar hasilinə dair bəzi bərabərsizliklərdən istifadə etməklə, bir çox olimpiada xarakterli çalışmaların səmərəli üsullarla həlli yolları qeyd olunmuşdur. Cəbri yolla çətin həll olunan və ya heç həll oluna bilməyən olimpiada tipli tənliklərin və tənliklər sisteminin vektorların skalyar hasili düsturlarından istifadə etməklə asan və orjinal həlli yolları göstərilmişdir. Həmçinin bəzi çətin yolla isbat olunan cəbri və həndəsi bərabərsizliklərin asan üsulla isbatı açıqlanmışdır.*

Açar sözlər: *vektor, skalyar hasil, bərabərsizlik, tənlik, triqonometrik funksiya, kosinus, sinus, ekstremum, üçbucaq*

Giriş

Olimpiadalar şagird və tələbələrin riyazi qabiliyyətlərinin ortaya çıxarılmasında, inkişaf etdirilməsində mühüm və əhəmiyyətli yer tutur. Olimpiadalarda yalnız əlaçı şagir və tələbələrin deyil, mühakimə qabiliyyəti güclü inkişaf etmiş şəxslərin iştirakı çox mühüm və vacibdir. Bəzən belə şagird və tələbələr olimpiadalardan sonra riyaziyyatla ciddi məşğul olur və gələcəkdə böyük müvəffəqiyyət qazanırlar. Olimpiadalarda iştirak edən şagirdlər edən şagird və tələbələr, çalışmaları həll etmək üçün müxtəlif üsullar tapmaq vərdişlərinə, qeyri-standart həll yolları axtarmaq qabiliyyətlərinə yiyələnirlər.

Olimpiadaların keçirilməsi riyaziyyata həvəsi və xüsusi istedadı olan şagird və tələbənin aşkar edilməsinə,ortaya çıxarılmasına şərait yaradır.

Qeyri-standart çalışmaların, orta məktəb proqramından kənar xüsusi həll tələb edən məsələlərin seçilməsi müəllimin qabiliyyət göstəricisidir. Sinifdənxaric məşğələlərdə bu materiallardan istifadə etmək üçün riyaziyyatın bir sıra bölmələrindən istifadə olunur ki, onlardan ən mühümü vektorların skalyar hasilidir.

Vektorların skalyar hasili,iki düz xətt arasındakı bucaq verildikdə həndəsi məsələlərin həllinin tapılmasında çox geniş tətbiq olunur. Cəbrdə isə vektorların skalyar hasili, bir sıra bərabərsizliklərin isbatında, bərabərsizliklər sisteminin həllində geniş istifadə olunur. Eyni zamanda bəzi cəbri yolla çətin həll olunan tənliklər sisteminin həllində, funksiyanın ekstremumunun tapılmasında, çətin triqonometrik bərabərsizliklərin isbatında vektorların skalyar hasili düsturlarından istifadə etmək daha məqsədəuyğundur. Bu kimi məsələlərin həlli həmişə müəllimlər arasında geniş mübahisəyə səbəb olur. Ona görə də bu tip məsələlərin həllini sinifdənxaric məşğələlərdə öyrənmək və öyrətmək daha əlverişlidir.

Ümumi halda bilirik ki, $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorların skalyar hasili, onların uzunluqları ilə aralarındakı φ bucağının kosinusu hasilinə bərabərdir, yəni $\vec{u}\cdot\ \vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\varphi$.

Əgər $\cos\varphi \leq 1$ olarsa, onda

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \text{ və ya } |\vec{u}\cdot\ \vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \tag{1}$$

olar. Buna görə də əgər $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorları koordinatları ilə verilərsə, yəni $\vec{u}(u_1, u_2)$ və $\vec{v}(v_1, v_2)$ olarsa, onda:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2u_2, |\vec{u}|=\sqrt{{u_1}^2+{u_2}^2},\ \ |\vec{v}|=\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}$$

olduğundan

$$u_1v_1+u_2v_2 \leq \sqrt{{u_1}^2{u_2}^2}\ \cdot\sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}\,, \tag{2}$$

$$|u_1v_1 + u_2v_2| \le \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}. \qquad (2')$$

Anoloji olaraq, üçölçülü fəzada

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \le \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}, \qquad (3)$$

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3| \le \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2} \qquad (3')$$

alarıq.

Bəzi cəbri bərabərsizliklərin isbatı

Çalışma 1. *x*+*y*+*z*=*t* olarsa, $\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}+\sqrt{2z+1} \le \sqrt{6t+9}$ olduğunu isbat edin [2].

İsbatı: $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorlarının koordinatlarını uyğun olaraq, $\vec{u}(\sqrt{2x+1};\ \sqrt{2y+1}; \sqrt{2z+1})$, $\vec{v}(1;1;1)$ kimi götürək. (3) düsturuna görə alarıq:

$$\sqrt{2x+1}\cdot 1 + \sqrt{2y+1}\cdot 1 + \sqrt{2z+1}\cdot 1 \le \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2} + (\sqrt{\left(\sqrt{2y+1}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{2z+1}\right)^2}} \cdot \sqrt{1^2+1^2+1^2}\ ;$$

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \le \sqrt{2x+1+2y+1+2z+1} \cdot \sqrt{3}\ ;$$

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \le \sqrt{2(x+y+z)+3} \cdot \sqrt{3}.\ \text{x+y+z=t}$$

olduğu üçün

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \le \sqrt{6t+9}$$

olar.

Çalışma 2. *x*+*y*+*z*=1 olarsa, $\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \le \sqrt{21}$ olduğunu isbat edin [3].

İsbatı: $\vec{u}(\sqrt{4x+1}; \sqrt{4y+1}; \sqrt{4z+1})$ və $\vec{v}(1;1;1)$ vektorlarını götürək. (3) düsturuna görə:

$$\sqrt{4x+1}\cdot 1 + \sqrt{4y+1}\cdot 1 + \sqrt{4z+1}\cdot 1 \le \sqrt{\left(\sqrt{4x+1}\right)^2 + \left(\sqrt{4y+1}\right)^2 + \left(\sqrt{4z+1}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+1^2} =$$

$$= \sqrt{4x+1+4y+1+4z+1} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4(x+y+z)+3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4\cdot 1+3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}.$$

Beləliklə, alırıq ki,

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \le \sqrt{21}.$$

Çalışma 3. *a, b, c*≥0 olarsa, $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \le a+b+c$ olduğunu isbat edin. [4]

İsbatı: $\vec{u}(\sqrt{a}; \sqrt{b}; \sqrt{c})$ və $\vec{v}(\sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{a})$ qəbul edək. (3) düsturuna görə:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \sqrt{b}\cdot\sqrt{c} + \sqrt{c}\cdot\sqrt{a} \le \sqrt{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 + (\sqrt{a})^2};$$

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \le \sqrt{(a+b+c)^2}.$$

a, b, c ≥ 0 olduğu üçün

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} \le a+b+c$$

olar.

Çalışma 4. Katetləri *a* və *b*, hipotenuzu *c* olan düzbucaqlı üçbucaqda *a*+*b*≤ $c\sqrt{2}$ olduğunu isbat edin. [7]

İsbatı: $\vec{u}$ və $\vec{v}$ vektorlarını aşağıdakı kimi götürək: $\vec{u}(1;1)$, $\vec{v}(a,b)$

(2) düsturuna görə

$$1\cdot a + 1\cdot b \le \sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a+b \le \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Pifoqor teoreminə görə $a^2+b^2 = c^2$ olduğu üçün a+b≤ $c\sqrt{2}$ alarıq.

Çalışma 5. *x*∈ [2,5; 16] olduqda $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{48-3x} \le 12$ olduğunu isbat edin. [6].

İsbatı: $\vec{u}(\sqrt{x+2}; \sqrt{2x-5}; \sqrt{48-3x})$ və $\vec{v}(1;1;1)$ olsun. Onda (3) düsturuna görə:

$$1\cdot\sqrt{x+2} + 1\cdot\sqrt{2x-5} + 1\cdot\sqrt{48-3x} \le \sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 + (\sqrt{2x-5})^2 + (\sqrt{48-3x})^2}\ ;$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{48-3x} \le \sqrt{3}\sqrt{x+2+2x-5+48-3x};$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{48-3x} \le 3\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{48-3x} \le 12.$$

Bəzi triqonometrik bərabərsizliklərin isbatı

Çalışma 6. Göstərin ki, $|3\sin\alpha - \cos\alpha| \leq 5$ bərabərsizliyi α-nın istənilən qiymətində doğrudur. [1]

İsbatı: $\vec{u}(3; -4)$ və $\vec{v}(\sin\alpha\,; \cos\alpha)$ götürək. $(2')$ düsturuna görə

$$|3\sin\alpha - 4\cos\alpha| \leq \sqrt{3^2 + (-4)^2}\ \cdot \sqrt{sin^2\alpha + cos^2\alpha}$$

və

$$|3\sin\alpha - 4\cos\alpha| \leq \sqrt{9+16} \cdot 1 \Rightarrow |3sin\alpha - 4cos\alpha| \leq 5$$

olar. Bərabərsizlik isbat olundu.

Çalışma 7. Bərabərsizliyi isbat edin: $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \leq 1$. [3]

İsbatı: $\vec{u}(\sin x \sin y, \cos x \cos y)$, $\vec{v}$ $(\sin z, \cos z)$ götürək. Onda (2) düsturuna görə:

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \leq \sqrt{sin^2x \cdot sin^2y + cos^2xcos^2y} \cdot \sqrt{sin^2z + cos^2z}\ ;$$

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z \leq \sqrt{\frac{1-\cos}{2} \cdot \frac{1-\cos 2y}{2} + \frac{1+cos}{2} \cdot \frac{1+\cos}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 - \cos 2y - \cos 2x + \cos 2x \cdot \cos 2y + 1 + \cos 2y + \cos 2x + \cos 2x \cdot \cos 2y} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\cos 2x \cdot \cos 2y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 + \cos 2x \cdot \cos 2y}.$$

1+$\cos 2x \cdot \cos 2y \leq 2$ olduğu üçün

$$\sin x \cdot \sin y \sin z + \cos y \cdot \cos y \cos z \leq 1.$$

İndi vektorların skalyar hasilinin tənliklərin və tənliklər sisteminin həllinə tətbiqinə aid bir neçə çalışma həlli nümunələrinə baxaq.

Çalışma 8. Tənliyi həll edin: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$. [7]

Həlli: Əvvəlcə DMQ-nu tapaq:

$$\begin{cases} 1 + x \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$\vec{u}(x; 1), \vec{v}(\sqrt{1+x}, \sqrt{3-x})$ qəbul edək. (2) düsturuna görə

$$x\sqrt{1+x} + 1 \cdot \sqrt{3-x}\ \leq \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{(\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{3-x})^2}\ ;$$

$$x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}\ \leq 2\sqrt{x^2+1}.$$

-1$\leq x \leq 3$ aralığında $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} < 2\sqrt{x^2+1}$ olduğu üçün verilən tənliyin həlli yoxdur.

Çalışma 9. Tənliklər sistemini həll edin: [5]

$$\begin{cases} x^6 + y^4 + z^2 = 1 \\ x^3 + 2y^2 + 3z = 4 \end{cases}$$

Həlli: $\vec{u}(x^3, y^2, z)$ və $\vec{v}(1, 2, 3)$ vektorlarına baxaq. Bu vektorların uzunluqlarını tapaq:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^6 + y^4 + z^2}\,, |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$\vec{u}$ $və \overrightarrow{\ }\vec{v}$ vektorlarının skalyar hasili

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x^3 \cdot 1 + y^2 \cdot 2 + z \cdot 3 = x^3 + 2y^2 + 3z$$

olar. Beləliklə, alırıq ki,

$$x^3 + 2y^2 + 3z \leq \sqrt{x^6 + y^4 + z^2}\ \cdot \sqrt{14} = 1 \cdot \sqrt{14} = \sqrt{14}\ .$$

4< $\sqrt{14}$ alındığı üçün verilən tənliklər sisteminin həlli yoxdur.

Nəticə

Olimpiada xarakterili bəzi məsələlər ənənəvi üsullarla çətin həll olunur və ya bəzən heç həll olunmur. Belə hallarda bəzən vektorların skalyar hasili və skalyar hasilə dair müəyyən bərabərsizliklərdən istifadə etməklə, bu tip çalışmaların asan yolla həll üsullarını tapmaq mümkündür.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Babaverdiyev A., Yaqublu H. və başqaları. Riyaziyyat test bankı. Müəllimlərin işə qəbulu. Bakı: MHM, 2022-2023, 390 s.

2. Balakişiyev A., Soltanova M. Qeyri-standart və düşündürücü çalışmalar. Bakı: MBM, 2015, 288 s.
3. Qəhrəmanlı M.İ. Riyaziyyatdan olimpiada məsələləri. Bak: MBM, 2008, 298 s.
4. Quliyev R.M., Qarayev F.A. Riyaziyyatdan olimpiada iştirakçıları üçün 200 variant. Bakı: Təhsil, 2009, 388 s.
5. MBA (MBA proqramı üzə hazırlaşanlar üçün vəsait). Bakı: "İQM" MMC, 2013, 560 s.
6. Yaqubov M.H., İsmayılov T.X. Riyaziyyat (I hissə). Dərs vəsaiti. Bakı: Şərq-Qərb, 2019, 552 s.
7. Агаханов Н.Х., Богданов И.И и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1996-2006. М.: МЦНМО, 2007, 472 с.

AN APPLICATION OF SCALAR MULTIPLICATION OF VECTORS IN SOME OLYMPIC TYPE EXERCISES

V.Abdullayev, S.Babushov
Mingachevir State University

Abstract: *The article speaks about effective solution of some Olympic type exercises by using some inequalities. In addition. In addition, the article also shows the easiest and original ways of solution of some Olympic type system of equations which cannot be solved or hard solved by algebraic ways by means of scalar sum formulas. The article also explains easy ways of proving algebraic and geometrical inequalities that are very difficult to prove.*
Keywords: *vector, scalar multiplication, sum, inequality, equation, trigonometric function, cosinus, sinus, ektremum, triangle*

ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ К НЕКОТОРЫМ УПРАЖНЕНИЯМ ОЛИМПИАДНОГО ТИПА

В.Ш.Абдуллаев, С.Н.Бабушов
Мингячевирский государственный университет

Резюме: *В статье отмечены эффективные способы решения многих задач олимпиадного характера применением некоторых неравенств, связанных скалярным произведением векторов. Для уравнении и систем уравнений, которые трудно решать или вообще невозможно решить алгебраическим способом, приведены более простые и оригинальные способы решения с применением формул скалярного произведения векторов. Также разъяснены более легкие способы доказательств некоторых алгебраических и геометрических неравенств, доказываемых относительно трудным способом.*
Ключевые слова: *вектор, скалярное произведение, неравенство, уравнение, тригонометрическая функция, косинус, синус, экстремум, треугольник*

Elmi redaktor: f.-r.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 21.02.2024
Çapa qəbul edilib: 28.02.2024