УДК 517.96

О РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Малахат Фаррух кызы Исмаилова
доктор философии по математике, доцент
Мингячевирский государственный университет
malahat.ismayilova@mdu.edu.az

Резюме: *В статье найдена связь между нижней границей спектра основного оператора операторно-дифференциального уравнения высокого порядка с двумя переменными и индексом весового пространства. Тем самым обеспечивается существование и единственность решения операторно-дифференциального уравнения высокого порядка с двумя переменными в весовых пространствах.*

Ключевые слова: *операторно-дифференциальное уравнение, гильбертово пространство, множество, вектор-функция, самосопряженный оператор, промежуточные производные, регулярное решение*

Введение

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – положительно определенный самосопряженный оператор. Обозначим через H_θ шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A, т.е. $D(A^\theta) = H_\theta$, $(x, y)_\theta = (A^\theta x, A^\theta y)$, $x, y \in D(A^\theta)$, $\theta \geq 0$. При $\theta = 0$ считаем, что $H_0 = H$. Пусть $R = (-\infty, \infty)$, $R^2 = R \times R$ и $L_2(R^2; H)$ есть гильбертово пространство вектор-функции $f(x, y)$, определенные почти всюду в R^2, со значениями в H, измеримые по Бохнеру, для которых

$$\|f\|_{L_2(R^2;H)} = \left(\iint_{R^2} \|f(x, y)^2\| dxdy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Теперь рассмотрим следующее операторно-дифференциальное уравнение $n = 2m$-го порядка

$$(-1)^n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + (-1)^n \frac{\partial^n u}{\partial y^n} + A^n u = f(x, y), \quad (x, y) \in R^2, \tag{1}$$

где $f(x, y)$, $u(x, y)$ – вектор-значные функции в пространстве H, со значениями а A – самосопряженный оператор в H.

Далее введем множество $D(R^2; H_n)$ – бесконечно дифференцируемые вектор-функции $u(x, y)$ со значениями в H_n, имеющие компактные носители в R^2. В линейном множестве $D(R^2; H_n)$ определим норму

$$\|u\|_{W_2^n(R^2;H)} = \left(\left\| \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^n} \right\|^2_{L_2(R^2;H)} + \left\| \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^n} \right\|^2_{L_2(R^2;H)} + \left\| A^n u(x, y) \right\|^2_{L_2(R^2;H)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\gamma \in (-\infty, \infty)^2 = R^2$ $(\gamma = (\gamma_1, \gamma_2))$ и определим гильбертовы пространства

$$L_{2,\gamma}(R^2;H)=\left\{f: f(x,y)e^{-\gamma_1 x-\gamma_2 y}\in L_2(R^2;H)\right\}$$

с нормой

$$\|f(x,y)\|_{L_{2,\gamma(R^2;H)}}=\left(\int_{R^2}\|f(x,y)\|e^{-2\gamma_1 x}e^{-2\gamma_2 y}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Знаем, что при $\gamma=0$ $L_{2,0}(R^2;H)=L_2(R^2;H)$. Тогда пространство $W_{2,\gamma}^n(R^2;H)$, определим в пространстве $D\left(R^2;H\right)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^n\left(R^2;H\right)}=\left(\left\|\frac{\partial^n u(x,y)}{\partial x^n}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)}+\left\|\frac{\partial^n u(x,y)}{\partial y^n}\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)}+\left\|A^n u(x,y)\right\|^2_{L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Полагаем, что $W_{2,0}^n(R^2;H)=W_2^n(R^2;H)$

Определение 1. Пусть для $f(x,y)\in L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)$ существует вектор-функция $u(x,y)\in W_{2,\gamma}^n(R^2;H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) в R^2, то её будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Пусть для любого $f(x,y)\in L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)$ существует регулярное решение уравнения (1) $u(x,y)$, для которого существует следующая оценка

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n\left(R^2;H\right)}\le const\|f(x,y)\|_{L_{2,\gamma}(R^2;H)}$$

то уравнению (1) будем называть регулярно разрешимым в пространстве $W_{2,\gamma}^n(R^2;H)$.

В данной работе мы найдем условия на спектр коэффициента A операторного уравнения (1) и на вектор $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$, при выполнении которых уравнение (1) окаяывается регулярно разрешимым в пространстве. Отметим, что когда A – эллиптический оператор с дискретным спектром, эта задача для одного переменного исследована в работе [1]. Для операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка эта задача рассмотрена в работе [2]. При некоторых условиях на рост резольvenты соответствующего пучка $\left(\lambda^n E+\mu^n E+A^n\right)^{-1}$ эта задача исследована в работах [2, 3]. При $\gamma=0$ эта задача для одного переменного исследована в работах [4, 5].

Обозначим через

$$P_0 u=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+\frac{\partial^n u}{\partial y^n}+A^n u,\qquad u(x,y)\in W_{2,\gamma}^n\left(R^2;H\right).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть A – положительно самосопряженный оператор, причем $\inf\limits_{\sigma\in\sigma(A)}\sigma=\mu_0>0$, тогда для $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$

$$\|\gamma\|=\sqrt[n]{\gamma_1^n+\gamma_2^n}<\frac{1}{\sqrt[n]{8}}\mu_0.$$

В этом случае уравнение (1) регулярно разрешимо [6].

Доказательство. Пусть $f(x,y)\in L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)$. В уравнении (1) сделаем замену $u(x,y)=v(x,y)e^{\gamma_1 x+\gamma_2 y}$

тогда получаем следующее уравнение в $L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_1\right)^n v(x,y)+\left(\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_2\right)^n v(x,y)=f(x,y)e^{-\gamma_1 x-\gamma_2 y}.$$

Очевидно, что $v(x,y)=u(x,y)e^{-\gamma_1 x-\gamma_2 y}\in L_2(R^2;H)$, $f(x)e^{-\gamma_1 x-\gamma_2 y}\in L_2(R^2;H)$. Здесь

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_1\right)^n v(x,y)=\frac{\partial^n v}{\partial x^n}+4\gamma_1\frac{\partial^{n-1}v}{\partial x^{n-1}}+6\gamma_1^{n-2}\frac{\partial^{n-2}v}{\partial x^{n-2}}+4\gamma_1^{n-1}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots+\gamma_1^n$$

а

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_2\right)^n v(x,y)=\frac{\partial^n v}{\partial y^n}+4\gamma_2\frac{\partial^{n-1}v}{\partial y^{n-1}}+6\gamma_2^{n-2}\frac{\partial^{n-2}v}{\partial y^{n-2}}+4\gamma_2^{n-1}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots+\gamma_2^n.$$

Обозначим через $g(x,y)=f(x,y)e^{-\gamma_1 x-\gamma_2 y}$. Тогда получаем следующее уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\gamma_1\right)^n v(x,y)+\left(\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_2\right)^n v(x,y)=g(x,y) \tag{2}$$

в пространстве $W_2^n(R^2;H)$.

Пусть $\hat{g}(\xi,\eta)$– преобразование вектор-функции $g(x,y)$

$$\hat{g}(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2} g(x,y)e^{-ix-iy}dxdy \tag{3}$$

и рассмотрим вектор-функцию

$$v(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\left((i\xi+\gamma_1)^n E+(i\eta+\gamma_2)^n E+A^n\right)^{-1}\hat{g}(\xi,\eta)e^{ix+iy}d\xi d\eta. \tag{4}$$

Очевидно, что вектор-функция удовлетворяет уравнению (2) почти всюду в R^2. Покажем, что выполнение условия теоремы вектор-функция $v(x,y)$ принадлежит пространству $W_2^n(R^2;H)$.

Очевидно, что

$$\hat{v}(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{R^2} v(x,y)e^{-ix-iy}dxdy=\left((i\xi+\gamma_1)^n E+(i\eta+\gamma_2)^n E+A^n\right)^{-1}\hat{g}(\xi,\eta)$$

Покажем, что $v(x,y)\in W_2^n(R^2;H)$. По теоремеЕраншереля

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|\frac{\partial^n v}{\partial y^n}\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|A^n v\right\|^2_{L_2(R^2;H)}&=\left\|\xi^{n-2}\hat{v}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\\+\left\|\eta^{n-2}\hat{v}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(R^2;H)}+\left\|A^n\hat{v}(\xi,\eta)\right\|^2_{L_2(R^2;H)}\end{aligned} \tag{5}$$

Поэтому, достаточно показать, что $\xi^n\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$, $\eta^n\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$ и $A^n\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2(R^2;H)$

Очевидно, что

$$\left\|\xi^n \hat{v}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)} = \left\|\xi^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E + (i\eta+\gamma_2)^n E + A^n\right)^{-1}\hat{g}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)} \le$$

$$\le \sup_{(\xi,\eta)}\left\|\xi^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E + (i\eta+\gamma_2)^n E + A^n\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|\hat{g}(\xi,\eta)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)} \le \tag{6}$$

$$\le \sup_{(\xi,\eta)}\left\|\xi^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E + (i\eta+\gamma_2)^n E + A^n\right)^{-1}\right\| \cdot \left\|g(x,y)\right\|_{L_2(R^2;H)}$$

Теперь оценим норму $\left\|\xi^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E + (i\eta+\gamma_2)^n E + A^n\right)^{-1}\right\|$ при любом $(\xi,\eta)\in R^2$. Из спектрального разложения оператора A следует, что при любом $(\xi,\eta)\in R$ имеет место оценка

$$\left\|\xi^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E + (i\eta+\gamma_2)^n E + A^n\right)^{-1}\right\| = \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left\|\xi^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E + (i\eta+\gamma_2)^n E + A^n\right)^{-1}\right\| \le$$

$$\le \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^n}{\left|(i\xi+\gamma_1)^n + (i\eta+\gamma_2)^n + \mu^n\right|} \le \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^n}{\mathrm{Re}\left((i\xi+\gamma_1)^n + (i\eta+\gamma_2)^n + \mu^n\right)} \le$$

$$\le \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^n}{\xi^n + \gamma_1^n + \eta^n + \gamma_2^n + \mu^n - 6\xi^{n-2}\gamma_1 - 6\eta^{n-2}\gamma_2} \le$$

$$\sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^n}{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2 + \left(\eta^{n-2} - 3\gamma_2^{n-2}\right)^2 + \left(\mu^n - 8\gamma_1^n - 8\gamma_2^n\right)} \le$$

$$\le \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\xi^n}{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2 + \left(\mu^n - 8\gamma_1^n - 8\gamma_2^n\right)} = \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{-\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2 - 9\gamma_1^n + 6\xi^{n-2}\gamma_1^{n-2}}{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2 + \left(\mu^n - 8\gamma_1^n - 8\gamma_2^n\right)} \le$$

$$\le \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2 + 6\xi^{n-2}\gamma_1^{n-2}}{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2 + \left(\mu^n - 8\gamma_1^n - 8\gamma_2^n\right)} \le \frac{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2}{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2 + \left(\mu_0^n - 8\gamma_1^n - 8\gamma_2^n\right)} +$$

$$+ 6\gamma_1^{n-2}\cdot\frac{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right) + 3\gamma_1^{n-2}}{\left(\xi^{n-2} - 3\gamma_1^{n-2}\right)^2 + \left(\mu_0^n - 8\left(\gamma_1^n + \gamma_2^n\right)\right)} \le 1 + 6\gamma_1^{n-2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mu_0^n - 8\left(\gamma_1^n + \gamma_2^n\right)}} +$$

$$+ 3\gamma_1^{n-2}\frac{1}{\mu_0^n - 8\left(\gamma_1^n + \gamma_2^n\right)}.$$

Таким образом, из (4) получаем, что

$$\left\|\xi^n \hat{v}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)} \le const\left\|g(x,y)\right\|_{L_2\left(R^2;H\right)},$$

т.е. $\xi^n \hat{v}(\xi,\eta) \in L_2(R^2;H)$. Аналогично получаем, что $\eta^n \hat{v}(\xi,\eta) \in L_2(R^2;H)$.

Теперь покажем, что $A^n \hat{v}(\xi,\eta) \in L_2\left(R^2;H\right)$

Очевидно, что

$$\left\|A^n \hat{v}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)} = \left\|A^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E + (i\eta+\gamma_2)^n E + A^n\right)^{-1}\hat{g}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)}$$

При любом $(\xi,\eta)\in R^2$ из спектрального разложения получаем, что

$$\left\|A^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E+(i\eta+\gamma_2)^n E+A^n\right)^{-1}\right\| \le \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left\|\mu^n\left((i\xi+\gamma_1)^n E+(i\eta+\gamma_2)^n E+\mu^n\right)^{-1}\right\| \le$$

$$\le \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\mu^n}{\operatorname{Re}\left((i\xi+\gamma_1)^n+(i\eta+\gamma_2)^n+\mu^n\right)} = \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\mu^n}{\xi^n+\gamma_1^n+\gamma_2^n+\mu^n-6\xi^{n-2}\gamma_1^{n-2}-6\eta^{n-2}\gamma_2^{n-2}} =$$

$$= \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\mu^n}{\left(\xi^{n-2}-3\gamma_1^{n-2}\right)^2+\left(\eta^{n-2}-3\gamma_2^{n-2}\right)^2+\left(\mu^n-8(\gamma_1^n+\gamma_2^n)\right)} \le \sup_{\mu\ge\mu_0}\frac{\mu^n}{\mu^n-8\left(\gamma_1^n+\gamma_2^n\right)} \le$$

$$\le \frac{\mu_0^n}{\mu_0^n-8\left(\gamma_1^n+\gamma_2^n\right)}.$$

Таким образом

$$\left\|A^n\hat{v}(\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^2;H)} \le \frac{\mu_0^n}{\mu_0^n-8\left(\gamma_1^n+\gamma_2^n\right)}\left\|g(x,y)\right\|_{L_2(R^2;H)}$$

т.е. $A^4\hat{v}(\xi,\eta)\in L_2\left(R^2;H\right)$. Следовательно, что $v(x,y)\in W_2^n(R^2;H)$ тогда $u(x,y)\in W_2^n(R^2;H)$. Так как $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению (5), то $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1). Отсюда видно, что уравнение $P_0u=0$ имеет только нулевое решение из $W_{2,\gamma}^n(R^2;H)$. С другой стороны

$$\|P_0u\|_{W_{2,\gamma,}^n\left(R^2;H\right)} \le const\|u\|_{W_{2,\gamma}^n\left(R^2;H\right)}.$$

Поэтому из теоремы Банаха об обратном операторе вытекает, что существует обратный $P_{0,\gamma}^{-1}:L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)\leftrightarrow W_{2,\gamma}^n\left(R;H\right)$, и поэтому

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(R^2;H)} \le const\|f\|_{L_{2,\gamma}\left(R^2;H\right)}.$$

Теорема доказана.

Использованная литература

1. Дублинский Ю.А. Смешанная задача для некоторых классов уравнений с частными производными. Труды Московского Математического общества, 1969, т.XX, с.203-298

2. Исмаилова М.Ф. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка на весовых пространствах. Вестник. БГУ, 2008, № 3, с. 47-52.

3. Исмаилова М.Ф. Исследование разрешимости операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных. Автореферат диссертации. Баку, 2011, 22 с.

4. Исмаилова М.Ф. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных поведении резольвенты соответствующего операторного пучка на мнимых осях / “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri” Beynəxalq Elmi konfransın materialları, Sumqayıt Dövlət Universiteti, 2017, с.152,153

5. Исмаилова М.Ф. Условия разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнения четвертого порядка / «Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri» Beynəxalq Elmi konfransın materialları, Sumqayıt Dövlət Universiteti, 2017, с.151-152

6. Исмаилова М.Ф. О регулярной разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого порядка на весовых пространствах / “Davamlı inkişaf

strategiyası: qlobal trendlər, milli təcrübələr və yeni hədəflər” mövzusunda I Beynəlxalq elmi konfransın materialları, Mingəçevir Dövət Universiteti, 2021, c.590-592

ÇƏKİLİ FƏZALARDA YÜKSƏK TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNƏ DAIR

M.F.İsmayılova
riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Mingəçevir Dövlət Universiteti

Xülasə: *Məqalədə bütün oxda iki dəyişənli yüksək tərtibli operator-diferensial tənliyin əsas operatorunun spektrinin aşağı sərhəddi ilə çəkili fəzanın göstəricisi arasında əlaqə tapılır. Bununla da çəkili fəzalarda ikidəyişənli yüksək tərtibli operator-diferensial tənliyin həllinin varllığı və yeganəliyi təmin edilir.*

Açar sözlər: *operator-diferensial tənlik, Hilbert fəzası, çoxluq, vektor-funksiya, öz-özünə qoşma operator, aralıq törəmə, requlyar həll*

ON THE SOLUTION OF THE HIGH ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS ON WEIGHT SPACES

M.Ismailova
Doctor of Philosophy in Mathematics, Associate Professor
Mingachevir State University

Abstract: *In the article, a connection is found between the lower bound of the spectrum of the main operator of a high-order operator-differential equation with two variables and the index of the weighted space. This ensures the existence and uniqueness of the solution of a high-order operator-differential equation with two variables in weighted spaces.*

Keywords: *operator differential equation, Hilbert space, set, vector function, self-adjoint operator, intermediate derivatives, regular solution*

Elmi redaktor: f.-r.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 14.02.2024
Çapa qəbul edilib: 21.02.2024