UOT 519.6

ÜMUMİLƏŞMİŞ İNTERPOLYASİYA MƏSƏLƏSİ

[1,3]**Mehman Bulud oğlu Rəsulov,** [2,3]**Vüqar Sabir oğlu Mustafayev**
[1]fizika-riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
mehman.rasulov@mdu.edu.az
[2]texnika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
vuqar.mustafayev@mdu.edu.az
[3]Mingəçevir Dövlət Universiteti

Xülasə: *Məqalədə ümumiləşmiş interpolyasiya məsələsinə baxılır. Əvvəlcə iki üsul ilə isbat edilir ki, Laqranj interpolyasiya çoxhədlisini və buna analoji olaraq, ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədlisini determinantlarla ifadə etmək olar. Sonra isbat edilir ki, interpolyasiya məsələsinin qoyuluşunda funksiyanın törəməsi üzərində bir şərt verilərsə (arqument eyni və ya müxtəlif ola bilər), yenə də həmin məsələnin həllini determinantlarla yazmaq olar. Daha sonra məsələnin qoyuluşunda axtarılan funksiyanın müxtəlif tərtibli törəmələri üzərində bir neçə şərt qəbul edilir və buna uyğun çoxhədlinin ifadəsi nəticə kimi yazılır.*

İnterpolyasiya çoxhədlisinin dərəcəsini bilmək, eləcə də məsələnin qoyuluşundakı xətti asılı şərtləri tapmaq üçün üsullar təklif edilir. $(n+1)$ *sayda şərt verilibsə, nəticədə* $k \le n$ *dərəcəli çoxhədli tapılır.* $k < n$ *olarsa, deməli, məsələnin qoyuluşunda* $(n-k)$ *sayda şərt xətti asılıdır (bu şərtləri çıxarmaq olar).*

Ümumiləşmiş interpolyasiya məsələsinin həllini daha çox məsələnin həlli üçün analoji qayda ilə ümumiləşdirmək olar.

Məqalədə nümunə üçün praktik misalın həlli verilir.

Açar sözlər: *ümumiləşmiş interpolyasiya funksiyası, Laqranj interpolyasiya çoxhədlisi, Teylor düsturu, diferensial, inteqral, determinant, EXCEL*

Giriş

İnterpolyasiya məsələsinin həlli üçün müxtəlif üsullar var (Laqranj, Nyuton, Qauss və s.). Məqalədə isbat olunur ki, ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədlisini (xüsusi halda Laqranj interpolyasiya çoxhədlisini, təkrar interpolyasiya çoxhədlisini, Teylor çoxhədlisini) determinantlarla ifadə etmək olar. İnterpolyasiya çoxhədlisinin dərəcəsini, habelə məsələnin qoyuluşundakı "artıq" (xətti asılı olan) şərtləri tapmaq olur, axtarılan çoxhədlinin standart şəklini (qüvvət sırası şəklində ifadəsini) yazmaq mümkündür. Determinantlarla yazılmış ifadəni bir neçə məsələnin həlli üçün analoji qaydada ümumiləşdirmək olur. Ümumiləşmiş interpolyasiya məsələsinin qoyuluşunda funksiyanın özünün və törəmələrinin qiymətləri təkrarlanan və təkrarlanmayan nöqtələrdə verilə bilər. Bütün hallarda ümumi düstur yazmaq mümkündür (funksiyanın müxtəlif tərtibli törəmələri üzərində qoyulan şərtlərdəki düyün nöqtələri müxtəlif ola bilər).

Teorem 1.

$$y(x_i) = y_i,\ i = \overline{0;\ n}\ (x_i \ne x_j,\ i \ne j) \tag{1}$$

şərtlərini ödəyən interpolyasiya çoxhədlisini

$$L_n(x) = -\frac{1}{A_{11}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \tag{2}$$

şəklində yazmaq olar [2], burada

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix} \tag{3}$$

Vandermont determinantıdır: $A_{11} \neq 0$ [7].

Teoremin isbatı: *I üsul.* Bu üsulda aşağıdakı teoremdən istifadə edəcəyik:

Teorem 2. $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədlilərinin dərəcələri n-i aşmırsa və n-dən çox sayda nöqtədə bu çoxhədlilər eyni qiymətlər alırsa, onda $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri üst-üstə düşür [7].

Bu teoremin şərtlərini yoxlayaq, məsələn, $x = x_0$ olduqda

$$L_n(x_0)=-\frac{1}{A_{11}}\begin{vmatrix}0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix}=-\frac{1}{A_{11}}\begin{vmatrix}0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ y_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix}.$$

(Birinci sətrin elementlərini (-1)-ə vurub, ikinci sətrin uyğun elementlərinin üzərinə əlavə etdik.) Buradan

$$L_n(x_0)=\frac{1}{A_{11}}\cdot y_0\cdot A_{11}=y_0$$

alırıq, yəni $L_n(x_0)=y_0$.

(1) şərtlərinin digərləri də analoji qaydada yoxlanıla bilər.

II üsul. Məlumdur ki, (1) şərtlərini ödəyən $y = f(x)$ funksiyası aşağıdakı bərabərliyi ödəyir [1]:

$$\begin{vmatrix}f(x) & 1 & x & x^2 & \dots & x^n\\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Buradan yaza bilərik:

$$\begin{vmatrix}f(x) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^n\\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix}=0.$$

$$f(x)\cdot A_{11}=-\begin{vmatrix}0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^n\\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{A_{11}}\begin{vmatrix}0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^n\\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n\\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n\end{vmatrix}.$$

Teorem 1 isbat edildi.

(2) düsturundan istifadə edərək, (1) sistemindən “artıq” olan şərtləri çıxara bilərik. Əgər (2) çoxhədlisində x^n-in cəbri tamamlayıcısı sıfırdırsa (bunu hesablamaq üçün (2) determinantının birinci sətrində x^n-in yerində 1, digər elementlərinin yerində isə sıfır yazıb, alınan yeni determinantı hesablamaq lazımdır), onda (1) şərtlərindən birini çıxara bilərik:

$$y(x_i)=y_i,\ i=\overline{0;\ n-1}\ (x_i\neq x_j,\ i\neq j). \tag{1'}$$

(1’) şərtlərinə uyğun olan (2) funksiyasını yazıb, yenə də ən yüksək dərəcəli qüvvətin (x^{n-1}-in) cəbri tamamlayıcısını hesablayırıq və s.

Qeyd 1. Hesablama işlərində EXCEL-in riyaziyyat kateqoriyasındakı funksiyalardan istifadə etmək əlverişlidir (МОБР, МОПРЕД).

Teorem 3. Fərz edək ki, elə n dərəcəli $L_n(x)$ çoxhədlisi var ki,

$$L_n(x_i) = y_i,\ i = \overline{0;\ n}\ , \tag{5}$$

$$L_n^{(k)}(x_p) \neq y_{pk}\ ,\ 0 \leq k \leq n\ ,\ x_p \in [a; b]\ , \tag{6}$$

şərtlərini ödəyir, burada

$$a = min\{x_0;\ x_1; \dots;\ x_n\}\ ,\ b = max\{x_0;\ x_1; \dots;\ x_n\}\ , \tag{7}$$

y_{pk} isə əvvəlcədən verilmiş ədəddir. Onda elə yeganə $(n+1)$ dərəcəli $L_{n+1}(x)$ çoxhədlisi var ki,

$$L_{n+1}(x_i) = y_i,\ i = \overline{0;\ n}\ ;\ L_{n+1}^{(k)}(x_p) = y_{pk}\ ,\ 0 \leq k \leq n\ . \tag{8}$$

Teorem 3-ün isbatı: Göstərək ki, axtarılan $L_{n+1}(x)$ çoxhədlisi aşağıdakı bərabərliyi ödəyir:

$$-M_{11} \cdot L_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^n & x^{n+1} \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & x_n^{n+1} \\ y_{pk} & z_{p0}^{(k)} & z_{p1}^{(k)} & z_{p2}^{(k)} & \dots & z_{pn}^{(k)} & z_{p(n+1)}^{(k)} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

burada $z_i^{(k)}(x) = (x^i)^{(k)};\ z_{pi}^{(k)} = z_i^{(k)}(x_p),\ i = \overline{0;\ n+1};\ 1 < k \leq n;$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & x_n^{n+1} \\ z_{p0}^{(k)} & z_{p1}^{(k)} & z_{p2}^{(k)} & \dots & z_{pn}^{(k)} & z_{p(n+1)}^{(k)} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

İsbatı. 2 hal ola bilər:

$$M_{11} \neq 0. \tag{11}$$

(11) şərti daxilində (8) şərtlərinin hər biri ayrılıqda toxlanıla bilər. Məsələn, $x = x_0$ olduqda

$$-M_{11} \cdot L_{n+1}(x_0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & x_n^{n+1} \\ y_{p_k} & z_{p0}^{(k)} & z_{p1}^{(k)} & z_{p2}^{(k)} & \dots & z_{pn}^{(k)} & z_{p(n+1)}^{(k)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ y_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & x_n^{n+1} \\ y_{pk} & z_{p0}^{(k)} & z_{p1}^{(k)} & z_{p2}^{(k)} & \dots & z_{pn}^{(k)} & z_{p(n+1)}^{(k)} \end{vmatrix} = -y_0 \cdot M_{11} \Rightarrow L_{n+1}(x_0) = y_0.$$

(Yuxarıda birinci sətrin elementlərini (-1)-ə vurub, ikinci sətrin uyğun elementlərinin üzərinə əlavə etmişik.)

(8) şərtlərinin digərləri də analoji qaydada yoxlanıla bilər. (9) bərabərliyinin sağ tərəfindəki determinantın $(n+1)$ dərəcəli çoxhədli olduğunu göstərək. Bu məqsədlə (2) və (6) şərtlərindən istifadə edək:

$$L_n^{(k)}(x_p) \neq y_{pk} \Rightarrow y_{pk} \neq \left[L_n^{(k)}(x) \right]_{|x=x_p} \Rightarrow y_{pk} \neq -\frac{1}{A_{11}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}^{(k)}_{|x=x_p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{11} \cdot y_{pk} \neq - \begin{vmatrix} 0 & z_{p0}^{(k)} & z_{p1}^{(k)} & z_{p2}^{(k)} & \dots & z_{pn}^{(k)} \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_{pk} & z_{p0}^{(k)} & z_{p1}^{(k)} & z_{p2}^{(k)} & \dots & z_{pn}^{(k)} \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Yəni (9) bərabərliyinin sağ tərəfindəki determinantda x^{n+1}-in cəbri tamamlayıcısı (uyğun çoxhədlinin ən yüksək dərəcəli həddinin əmsalı) sıfırdan fərqlidir, başqa sözlə, (9) bərabərliyinin sağ tərəfindəki çoxhədlinin dərəcəsi $(n+1)$-dir. Deməli, (11) şərti daxilində teorem tam isbat edildi.

İndi də $M_{11} = 0$ halına baxaq. Bu məqsədlə fərz edək ki, axtarılan $L_{n+1}(x)$ çoxhədlisi aşağıdakı şəkildədir:

$$L_{n+1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}.$$

Onda yaza bilərik:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + a_{n+1} x_0^{n+1} = y_0; \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n + a_{n+1} x_1^{n+1} = y_1; \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n + a_{n+1} x_2^{n+1} = y_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n + a_{n+1} x_n^{n+1} = y_n; \\ a_0 z_{p0}^{(k)} + a_1 z_{p1}^{(k)} + a_2 z_{p2}^{(k)} + \dots + a_n z_{pn}^{(k)} + a_{n+1} z_{p(n+1)}^{(k)} = y_{pk}. \end{cases} \tag{12}$$

(12) sisteminin baş determinantı M_{11}-ə bərabərdir.

Aşağıdakı 3 hal ola bilər:

I hal. $M_{11} \neq 0$, bu halda (12) sisteminin yeganə həlli var – bu hala baxdıq.

II hal. $M_{11} = 0$ və (12) sisteminin bütün köməkçi determinantlarının hamısı sıfırdır. Bu halda (12) sisteminin sonsuz sayda həlli var.

III hal. $M_{11} = 0$ və (12) sisteminin köməkçi determinantlarından heç olmasa biri sıfırdan fərqlidir. Bu halda (12) sisteminin həlli yoxdur.

Deməli, $L_{n+1}(x)$ çoxhədlisinin varlığı və yeganəliyi üçün $M_{11} \neq 0$ olmalıdır, bu da x_p nöqtəsinin seçilməsindən asılıdır. Əgər M_{11} determinantının son sətrində ((10)-un son sətrində) $x = x_p$ qeyd edilməsə, $M_{11}(x) = 0$ münasibəti $(n+1-k)$ dərəcəli çoxhədlini ifadə edər, bu çoxhədlinin isə ən çoxu $(n+1-k)$ sayda kökü ola bilər.

Alırıq ki, (8) şərtlərini ödəyən çoxhədlinin varlığı və yeganəliyi üçün zəruri və kafi şərt $M_{11} \neq 0$ şərtidir, bu da x_p nöqtəsinin seçilməsindən asılıdır.

$M_{11} \neq 0$ şərti daxilində (9) bərabərliyindən $L_{n+1}(x)$ çoxhədlisi birqiymətli tapılır:

$$L_{n+1}(x) = -\frac{1}{M_{11}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^n & x^{n+1} \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & x_n^{n+1} \\ y_{pk} & z_{p0}^{(k)} & z_{p1}^{(k)} & z_{p2}^{(k)} & \dots & z_{pn}^{(k)} & z_{p(n+1)}^{(k)} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Teorem 3 tam isbat edildi.

Qeyd 2. (6) şərti $k = 0$ halında həndəsi olaraq o deməkdir ki, $(x_p;\ y_{p0})$ nöqtəsi (5) şərtlərini ödəyən n dərəcəli çoxhədlinin qrafiki üzərində deyil, başqa sözlə, $(x_p;\ y_{p0})$ nöqtəsi $(x_i;\ y_i)$ $(i = \overline{0;\ n})$ nöqtələrindən keçən n dərəcəli çoxhədlinin qrafiki üzərində deyil.

(6) şərti $k = 1$ halında həndəsi olaraq onu ifadə edir ki, $(x_p;\ y_{p1})$ nöqtəsi $(x_i;\ y_i)$ $(i = \overline{0;\ n})$ nöqtələrindən keçən n dərəcəli çoxhədlinin törəməsinə uyğun olan qrafik üzərində deyil və s.

Teorem 3-dən alınan nəticə.

$$y(x_i) = y_i,\ i = \overline{0;\ n}\ (x_i \neq x_j,\ i \neq j)\,, \tag{14}$$

$$y^{(k_1)}(x_{p_1}) = y_{k_1p_1};\ y^{(k_2)}(x_{p_2}) = y_{k_2p_2};\ \dots;\ y^{(k_m)}(x_{p_m}) = y_{k_mp_m};\ x_{p_q} \in [a; b],\ q = \overline{1;\ m};$$
$$k_1, k_2, \dots,\ k_m \in \{1, 2, \dots, n\}, \tag{15}$$

şərtlərini ödəyən və dərəcəsi $(n + m)$ ədədini aşmayan $f(x)$ ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədlisi üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$f(x) \cdot M_{11}^* = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n+m} \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n+m} \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n+m} \\ y_{k_1p_1} & z_{p_10}^{(k_1)} & z_{p_11}^{(k_1)} & z_{p_12}^{(k_1)} & \dots & z_{p_1(n+m)}^{(k_1)} \\ y_{k_2p_2} & z_{p_20}^{(k_2)} & z_{p_21}^{(k_2)} & z_{p_22}^{(k_2)} & \dots & z_{p_2(n+m)}^{(k_2)} \\ y_{k_mp_m} & z_{p_m0}^{(k_m)} & z_{p_m1}^{(k_m)} & z_{p_m2}^{(k_m)} & \dots & z_{p_m(n+m)}^{(k_m)} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

burada M_{11}^* ilə sağ tərəfdəki determinantın birinci sətri ilə birinci sütununun kəsişməsində yerləşən elementin (sıfırın) cəbri tamamlayıcısını işarə edirik.

Qeyd 3. $M_{11}^* \neq 0$ şərti (15) sistemindəki x_{p_m} nöqtələrinin seçilməsindən asılıdır. Əgər $M_{11}^* \neq 0$ olarsa, (16)-dan $f(x)$-i tapa bilərik.

$f(x)$-in dərəcəsini bilmək üçün 2 üsul var:

a) (16)-nın sağ tərəfindəki determinantın birinci sətrində bütün elementləri sıfıra bərbər edib, növbə ilə x^{n+m}; x^{n+m-1}; ... yerinə 1 yazıb, alınan determinantı hesablayırıq.

b) $f(x) \neq 0$ şərtini ödəyən x-in qiymətini (16)-nın sağ tərəfindəki determinantın birinci sətrində yazmalı, alınan determinanta uyğun olan matrisin tərsini tapmalı, tərs matrisin birinci sütun elementlərindən istifadə etməliyik.

Qeyd 4. (16) ilə müəyyən olunan $f(x)$-in diferensialı və inteqralı üçün də ifadə yaza bilərik [3; 4]. Sadəlik üçün (16)-nın sağ tərəfindəki determinantı

$$g(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^t \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2(t+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(t+2)1} & a_{(t+2)2} & a_{(t+2)3} & a_{(t+2)4} & \dots & a_{(t+2)(t+2)} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

ilə işarə edək: $t = n + m$. Onda:

$$g^{(d)}(x) = \begin{vmatrix} (0)^{(d)} & (1)^{(d)} & (x)^{(d)} & (x^2)^{(d)} & \dots & (x^t)^{(d)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2(t+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(t+2)1} & a_{(t+2)2} & a_{(t+2)3} & a_{(t+2)4} & \dots & a_{(t+2)(t+2)} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$\int_a^b g(x)dx = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{t+2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2(t+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(t+2)1} & a_{(t+2)2} & a_{(t+2)3} & a_{(t+2)4} & \dots & a_{(t+2)(t+2)} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

yaza bilərik [4], burada $c_1 = 0$, $c_2 = x|_a^b$, $c_3 = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b$, … , $c_{t+2} = \frac{x^{t+1}}{t+1}\Big|_a^b$.

Xüsusi halda Ermit, (2) Laqranj, Teylor düsturlarını yaza bilərik.

Qeyd 5. (2) münasibətində $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ əvəzində $[a; b]$ parçasında xətti asılı olmayan $\{\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), \dots,\ \varphi_n(x)\}$ funksiyalar sistemini də götürmək olar [6].

Misal. $f(x) = x^5$ funksiyasını ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədlisi kimi determinantlarla ifadə etməli.

Həlli. $y = x^5$ funksiyası üçün aşağıdakı cədvəli tərtib edirik:

$x_0 = 1$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$
$y_0 = f(1)$ $y_0 = 1$	$y_0' = f'(1)$ $y_0' = 5$	$y_0'' = f''(1)$ $y_0'' = 20$	$y_1''' = f'''(2)$ $y_1''' = 240$	$y_1'''' = f''''(2)$ $y_1'''' = 240$	$y_2''''' = f'''''(3)$ $y_2''''' = 120$

Bu cədvəl əsasında yaza bilərik:

$$f(x) = -\frac{1}{A_{11}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 & x_0^5 \\ y_0' & 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & 4x_0^3 & 5x_0^4 \\ y_0'' & 0 & 0 & 2 & 6x_0 & 12x_0^2 & 20x_0^3 \\ y_1''' & 0 & 0 & 0 & 6 & 24x_1 & 60x_1^2 \\ y_1^{IV} & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 120x_1 \\ y_2^{V} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{vmatrix}.$$

Aşağıdakı cavablar alınmışdır (EXCEL-də):

$x_0 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = -2$	$x_0 = 1$	$x_5 = -1$	$x_0 = 1$
$y(1) = 1$	$f(3)$ $= 243$	$f(4)$ $= 1024$	$f'(-2)$ $= 80$	$f''(1)$ $= 20$	$f'''(-1)$ $= 60$	$f''''(1)$ $= 120$

Nəticə

Ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədlisi determinantlarla ifadə edilir. Hesablamada lazım gələn iki determinantdan biri digərinin bir elementinin cəbri tamamlayıcısıdır. Yəni məsələnin həlli üçün tək bir determinantı tərtib etmək kifayətdir. Məsələnin qoyuluşunda axtarılan funksiyanın özü və k tərtibli ($k = \overline{0;\ n}$) törəmələri üzərində şərt qoyulur. Bu şərtlərdə arqumentin həm eyin, həm də müxtəlif qiymətlərindən istifadə olunur. Xüsusi halda Laqranj interpolyasiya çoxhədlisi, təkrar interpolyasiya çoxhədlisi, Teylor düsturu determinantlarla ifadə olunur. Bu düsturlardan istifadə edərək axtarılan funksiyanın diferensialı və inteqralı üçün ifadə yazmaq olur.

Ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədlisinin determinantlarla ifadəsinə analoji olaraq, Bul funksiyalarının Jeqalkin çoxhədlisini [5], çoxdəyişənli funksiyaların ümumiləşmiş interpolyasiya çoxhədlisini (məsələnin qoyuluşunda xüsusi törəmələr iştirak edir), k moduluna görə məntiq funksiyalarının ifadəsini də yazmaq olar. Bu düsturlar üç nöqtədən keçən müstəvi tənliyi, fundamental həllər sistemi verilmiş adi diferensial tənliyin düsturu ilə analogiya əmələ gətirir. Ümumiləşmiş interpolyasiya məsələsinin həlli olan çoxhədlinin dərəcəsini müəyyən etmək, çoxhədlini diferensiallamaq və inteqrallamaq [3; 4], habelə onu standart şəkildə ifadə etmək asanlaşır, müxtəlif ekstropolyasiya məsələsini də həll etmək olur.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Əkbərov M. Ali cəbr. Bakı: Maarif, 1976, 387 s.
2. Rəsulov M.B., Əhmədov V.U., Məmmədova M.S. Laqranj interpolyasiya çoxhədlisinin determinantlarla ifadə olunması. ADAU-nun Elmi əsərləri. Gəncə, 2017, № 1, s. 145-148
3. Rəsulov M.B. Laqranj interpolyasiya çoxhədlisinin yüksək tərtibli törəmələrinin determinantlarla ifadə olunması // "Qlobal tendensiyalar və müasir Azərbaycan" Respublika elmi konfransının materialları, 7-8 may 2018-ci il, Mingəçevir Dövlət Universiteti, Mingəçevir, s. 145-148, URL: https://mdu.edu.az/wp-content/uploads/2022/04/Konfrans_2018.pdf
4. Rəsulov M.B., Mustafayev S.M. İnterpolyasiya çoxhədlisinin ədədi diferensiallanması və inteqrallanması // Proceedıngs book of MAS 19th Internatıonal European Conference On Mathematıcs, Engıneerıng, Natural & Medıcal Scıences, April 17-18, 2024, Mingachevir State University, Mingachevir, Azerbaijan, pp. 319-325. URL: https://mdu.edu.az/wp-content/uploads/2024/05/19.-MAS-BOOK.pdf
5. Rəsulov M.B., Əhmədov M.İ.. Tərs matris və determinantların Jeqalkin çoxhədlisinə tətbiqi // Dahi Azərbaycan alimi və mütəfəkkiri Nəsirəddin Tusinin xatirəsinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın Müasir Problemləri" XI Beynəlxalq elmi konfransının materialları, Bakı, 03-06 iyul 2024-ci il, s. 71-73
6. Məmmədov Y.C. Təqribi hesablama üsulları. Bakı: "Bakı Universiteti" nəşriyyatı, 2008, 288 s.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для вузов. 25-е изд. СПб.: Лань, 2024, 432с.

GENERALIZED INTERPOLATION PROBLEM

[1,2]**M.Rasulov**, [2,3]**V.Mustafayev**
[1]Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, Associate Professor
[2]Doctor of Philosophy in Technics, Accociate Professor
[3]Mingachevir State University

Abstract: *The article is devoted to the generalized interpolation problem. It is proved that the Lagrange interpolation polynomial and, similarly, the generalized interpolation polynomial are expressed through determinants. Then it is proved that if in the formulation of the interpolation problem a condition is set for the derivative function (the argument can be the same or different), then the solution of this problem can still be written with determinants. Then, several conditions are accepted for different derivative functions, which is sought in the task statement, and as a result, the expression of the corresponding polynomial is written out.*

Methods are proposed that allow one to find out the degree of the interpolation polynomial, as well as to find linearly dependent terms in the problem statement. If (n+1) number of conditions is given, the result is a polynomial of degree k≤n. If k<n, then (n-k) number of conditions are linearly dependent in the problem statement (these conditions can be derived).

The solution to the generalized interpolation problem can be generalized using a similar rule to solve a larger number of problems.

The article provides an example of a solution to a practical problem.

Keywords: *generalized interpolation function, Lagrange interpolation polynomial, Taylor formula, differential, integral, determinant, EXCEL*

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

[1,2]М.Б.Расулов, [2,3]В.С.Мустафаев
[1]доктор философии по физике и математике, доцент
[2]доктор философии по технике, доцент
[3]Мингячевирский государственный университет

Резюме: *Статья посвящена обобщенной задаче интерполяции. Доказано, что интерполяционный полином Лагранжа и, аналогично, обобщенный интерполяционный полином выражаются через определители. Затем доказывается, что если в постановке интерполяционной задачи задано условие на производную функции (аргумент может быть одинаковым или различным), то решение этой задачи все равно можно записать с определителями. Затем принимается несколько условий на разные производные функции, искомой в постановке задачи, и в результате выписывается выражение соответствующего полинома.*

Предлагаются методы, позволяющие узнать степень интерполяционного полинома, а также найти линейно зависимые члены в постановке задачи. Если задано (n+1) количество условий, результатом является многочлен степени k≤n. Если k<n, то (n-k) количество условий линейно зависят в формулировке задачи (эти условия можно вывести).

Решение обобщенной задачи интерполяции можно обобщить с помощью аналогичного правила для решения большего числа задач.

В статье на примере дано решение практической задачи.

Ключевые слова: *обобщенная интерполяционная функция, интерполяционный полином Лагранжа, формула Тейлора, дифференциал, интеграл, определитель (детерми́нант), EXCEL*

Elmi redaktor: r.-f.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 25.08.2024
Çapa qəbul edilib: 08.09.2024