Dayanıqlı inkişaf, cild 4, № 2, 2024

UOT 517.2/.3

FUNKSİONAL TƏNLİK VƏ ONLARIN HƏLLİ ÜSULLARI HAQQINDA

[1,4]**Vaqif Şahismayıl oğlu Abdullayev,** [2,4]**Sabir Nəriman oğlu Babuşov,**
[3,4]**Əfsanə Məzahir qızı Mürsəlova**
[1]vaqif.abdullayev@mdu.edu.az.
[2]sabir.babushov@mdu.edu.az
[3]afsana.mursalova@mdu.edu.az
[4]Mingəçevir Dövlət Universiteti

Xülasə: *Məqalədə funksional tənliklərə və onların sistemlərinə aid bir sıra nəzəri məlumatlar verilmiş, onların bəzi izahları qeyd olunmuşdur. Funksiya termininin mənasının nə olduğu şərh edilmiş və* $y = f(x)$ *şəklində göstərməyi, ilk dəfə alman riyaziyyatçısı Leonard Eylerin təklif etdiyi açıqlanmışdır. Müxtəlif növ funksional tənliklərin ayrı-ayrı əvəzləmələrlə həll olunduğu qeyd olunmuş, mürəkkəb funksiyaların işarə olunma qaydaları göstərilmiş və izah olunmuşdur. Məqalədə müxtəlif növ funksional tənliklər və tənliklər sistemləri izahlı, ətraflı və aydın şəkildə həll olunmuş, həll zamanı əmələ gələn çətinliklər qeyd edilmişdir.*

Açar sözlər: *funksional, tənlik, funksiya, tək, cüt, dövri, arqument, kəsilməz, kəsilən, mürəkkəb, xarakteristika, asılı olma, məchul, kompozisiya,superpozisiya*

Giriş

Məchulu funksiya olan tənliklərə funksional tənliklər deyilir. Axtarılan funksiya müəyyən çevirmələrlə, mürəkkəb funksiyanın əmələ gəlməsi əməliyyatları ilə, verilən məlum funksiyalarla əlaqəli (bağlı) olur . Adətən, elə funksiyalar sinfi göstərilir ki, onlar arasında məlum olmayan funksiyalar sinfi axtarılır (məsələn, kəsilməz və kəsilən funksiyalar sinfi, ölçülən funksiyalar sinfi). Tək və cüt funksiyaların, dövri funksiyaların tərifləri funksional tənliklər vasitəsilə verilir.

Funksiya sözü, latın sözündən götürülmüşdür və əməletmə, yerinə yetirmə, tamamlama və s. mənalarında işlədilir. *y*-in *x*-dən asılı olmasını $y = f(x)$ şəklində göstərməyi L.Eyler təklif etmiş-dir. Burada funksiya sözünü ifadə edən f hərfinə funksiyanın xarakteristikası deyilir. Xarakteristika, funksiyanın uyğun qiymətini almaq üçün arqumentin qiyməti üzərində hansı əməlləri aparmaq lazım olduğunu göstərir. Funksiya $y = f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$ və s. şəklində yazılır.

$y = f(g(x))$ şəklində yazılan funksiyalara mürəkkəb funksiyalar deyilir. Bu funksiyanı $y = (fog)(x)$ şəklində də yazmaq olar (funksiyaların kompozisiyası və ya superpozisiyası).

$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ *və* $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$şəklində verilmiş funksional tənliklərin kəsilməz həlləri uyğun olaraq $y = lnx$ və $y = e^x$ şəklində funksiyalardır .

$f(x + y) = f(x) + f(y)$ şəklində funksional tənliyinin ümumi həlli *f(x)=ax* funksiyası kimi axtarılır. Aydındır ki, burada ancaq kəsilməz həllərə baxılır, qalan kənar həllər atılır.

Funksional tənliklərə aid misallar

Misal 1. $f(x) + (2x + 5)f\left(\frac{x}{3x-1}\right) = 4x$ tənliyini ödəyən *f*(*x*) funksiyasını tapın [4].

Həlli: $\frac{x}{3x-1} = t$ qəbul edək. Buradan $x \neq \frac{1}{3}$ olduqda x-i tapaq:

$$x=(3x-1)t \;\Rightarrow\; 3xt - t = x \Rightarrow x = \frac{t}{3t-1}.$$

x-in tapılmış bu qiymətini $t \neq \frac{1}{2}$ olduqda verilən tənlikdə yerinə yazaq:

$$f\left(\frac{t}{3t-1}\right) + \left(2 \cdot \frac{t}{3t-1} + 5\right) f(t) = \frac{4t}{3t-1} \Rightarrow f\left(\frac{t}{3t-1}\right) + \frac{17t-5}{3t-1}\; f(t) = \frac{4t}{3t-1}.$$

t=*x* götürsək,

$$f\left(\frac{x}{3x-1}\right) + \frac{17x-5}{3x-1} f(x) = \frac{4x}{3x-1}$$

alarıq. Alınan bu tənliklə verilən tənliyi birlikdə həll edərək *f*(*x*)-i tapaq .

$$\begin{cases} f(x)+(2x+5)f\left(\frac{x}{3x-1}\right)=4x, \\ \frac{17x-5}{3x-1}f(x)+f\left(\frac{x}{3x-1}\right)=\frac{4x}{3x-1} \end{cases}\Bigg| -(2x+5$$

$$\begin{cases} f(x)+(2x+5)f\left(\frac{x}{3x-1}\right)=4x\,, \\ \frac{-(2x+5)(17x-5)}{3x-1}f(x)-(2x+5)f\left(\frac{x}{3x-1}\right)=-\frac{4x(2x+5)}{3x-1}\,. \end{cases}$$

Buradan alarıq:

$$\left(1-\frac{(2x+5)(17x-5)}{3x-1}\right)f(x)=4x-\frac{8x^2+20x}{3x-1}\Rightarrow\frac{3x-1-34x^2+10x-85x+25}{3x-1}f(x)==\frac{12x^2-4x-8x^2-20x}{3x-1}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{4x^2-24x}{-34x^2-72x+24}\Rightarrow f(x)=\frac{2x(x-6)}{12-36x-17x^2}\,.$$

Cavab: $f(x)=\frac{2x(x-6)}{12-36x-17x^2}$

Misal 2. $f(x)=\frac{x}{1-x}$ olarsa , $f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ - i tapın [6].

Həlli: $f(f(x))$ mürəkkəb funksiyasını tapmaq üçün $f(x)=\frac{x}{1-x}$ tənliyində x-in yerinə $f(x)$ yazaq:

$$f\left(f(x)\right)=\frac{f(x)}{1-f(x)}\Rightarrow f\left(f(x)\right)=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}\Rightarrow f\left(f(x)\right)=\frac{x}{1-2x}$$

$f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ funksiyasını almaq üçün $f\left(f(x)\right)=\frac{x}{1-2x}$ tənliyində x-in yerinə $f(x)$ qoyaq:

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{f(x)}{1-2f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-2\cdot\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-3x}\Rightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{x}{1-3x}.$$

Cavab: $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{x}{1-3x}$.

Misal 3. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ və $f(x)=\underbrace{f(f(\dots f(x))}_{n\ sayda}$ olarsa, $f_n(x)$-i tapın [7].

Həlli:$f\left(f(x)\right)=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$ olduğu üçün $f\left(f(x)\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}\Rightarrow f\left(f(x)\right)=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$. İndi $f(f(f(x)))$-i tapaq:

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{f(x)}{\sqrt{1+2f^2(x)}}\Rightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+2\cdot\frac{x^2}{1+x^2}}}\Rightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\ .$$

Prosesi bu qayda ilə davam etdirərək $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ alarıq.

Cavab: $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

Misal 4. Aşağıdakı tənliklər sistemini ödəyən $f(x)$ *və* $g(x)$ funksiyalarını tapın [3].

$$\begin{cases} f(3x-1)+4g(3x-1)=3x+2\,, \\ f\left(\frac{x}{x-2}\right)+g\left(\frac{x}{x-2}\right)=7x-7. \end{cases}$$

Həlli: $f(3x-1)+4g(3x-1)=3x+2$ tənliyində $3x-1=t$ qəbul edib, x-i tapaq:

$$x=\frac{t+1}{3}.$$

Onda $f(t)+4g(t)=3\cdot\frac{t+1}{3}+2=t+3$ olar. t –nin əvəzinə x yazsaq,

$$f(x)+4g(x)=x+3 \quad (1)$$

alarıq. İndi $f\left(\frac{x}{x-2}\right)+g\left(\frac{x}{x-2}\right)=7x-7$ tənliyində $\frac{x}{x-2}=k$ qəbul edib, x-i tapaq:

$$xk-2k=x\ \Rightarrow x(k-1)=2k\Rightarrow x=\frac{2k}{k-1},k\neq 1\,.$$

Onda: $f(k)+g(k)=7\cdot\frac{2k}{k-1}-7 \Rightarrow f(k)+g(k)=\frac{7k+7}{k-1}$.
Bu tənlikdə k-nın əvəzinə x yazsaq,

$$f(x)+g(x)=\frac{7x+7}{x-1} \quad (2)$$

(1) və (2) tənliklərindən

$$\begin{cases} f(x)+4g(x)=x+3 \\ f(x)+g(x)=\frac{7x+7}{x-1} \end{cases}.$$

tənliklər sistemi alınır. Bu tənliklər sistemini həll edərək,

$$g(x)=\frac{x^2-5x-10}{3(x-1)} \text{ və } f(x)=\frac{x^2-26x-31}{3(1-x)}$$

alarıq.

Cavab: $g(x)=\frac{x^2-5x-10}{3(x-1)}$ və $f(x)=\frac{x^2-26x-31}{3(1-x)}$.

Misal 5. $\begin{cases} f(2x+2)+2g(4x+7)=x-1 \\ f(x-1)+g(2x+1)=2x \end{cases}$

tənliklər sistemini ödəyən $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarını tapın [5].

Həlli: Sistemin birinci tənliyində $2x+2=t-1$ qəbul edək . Onda $2x=t-3$ və ya $x=\frac{t-3}{2}$ olar. $4x+7=4\cdot\frac{t-3}{2}+7=2t+1$ alarıq. Bu tapdıqlarımızı sistemin birinci tənliyində nəzərə alsaq,

$$f(t-1)+2g(2t+1)=\frac{t-3}{2}-1 \text{ və ya } f(t-1)+2g(2t+1)=\frac{t-5}{2}$$

alarıq. Burada t-nin əvəzinə x yazsaq:

$$f(x-1)+2g(2x+1)=\frac{x-5}{2}.$$

Alınmış bu tənliklə sistemin ikinci tənliyini birgə həll edək :

$$\begin{cases} f(x-1)+2g(2x+1)=\frac{x-5}{2} \\ f(x-1)+g(2x+1)=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(2x+1)=\frac{-5-3x}{2} \\ f(x-1)=\frac{5+7x}{2} \end{cases}$$

Axırıncı tənliklər sistemində $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının tapaq.
$f(x-1)=\frac{5+7x}{2}$ tənliyində x-in əvəzinə $x+1$ yazsaq,

$$f(x+1-1)=\frac{5+7(x+1)}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{7x+12}{2}.$$

alarıq. $g(2x+1)=\frac{-5-3x}{2}$ tənliyində x-in əvəzinə $\frac{x-1}{2}$ yazsaq,

$$g\left(2\cdot\frac{x-1}{2}+1\right)=\frac{-5-3\frac{x-1}{2}}{2} \Rightarrow g(x)=-\frac{3x+7}{4}$$

alarıq.

Cavab: $f(x)=\frac{7x+12}{2}$, $g(x)=-\frac{3x+7}{4}$.

Misal 6. $f(x)+xf(-x)=-2x^2+5x+3$ olarsa, $f(x)$ və $f(4)$-ü tapın [1].

Həlli: Verilən tənlikdə x-in əvəzinə $-x$ yazaq:

$$f(-x)-xf(x)=-2(-x)^2+5(-x)+3 \Rightarrow f(-x)-xf(x)=-2x^2-5x+3.$$

Bu tənliklə verilən tənliyi birlikdə həll edərək, $f(x)$-i tapaq:

$$\begin{cases} f(x)+xf(-x)=-2x^2+5x+3 \\ xf(x)-f(-x)=2x^2+5x-3 \end{cases}\Big|_x \Rightarrow \begin{cases} f(x)+xf(-x)=-2x^2+5x+3 \\ x^2f(x)-xf(-x)=2x^3+5x^2-3x \end{cases}$$

Buradan alınır ki,

$$(1+x^2)f(x)=2x^3+3x^2+2x+3 \Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2+2x+3}{x^2+1}=\frac{2x(x^2+1)+3(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)(2x+3)}{x^2+1}=2x+3\Rightarrow f(x)=2x+3\,.$$

Aldığımız bu tənlikdə x=4 yazsaq, $f(4)=2\cdot 4+3=11$ alarıq .

Cavab: $f(x)=2x+3$, f(4)=11.

Misal 7. $f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=x+4$ və $f(2a+6)=\frac{5}{2}$ olarsa, a-nı tapın [2].

Həlli: Bilirik ki, f(x) funksiyasının tərsi olan funksiyanı bəzən $g(x)=f^{-1}$(x) şəklində də yazırlar. Ona görə də $g\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=x+4$ yaza bilərik.

İndi $g(x)$ funksiyasını tapaq. Bunun üçün $\frac{2x+1}{x-2}=t$ ilə əvəz edək. Buradan: $2x+1=tx-2t\Rightarrow 2x-tx=-2t-1\ \Rightarrow x=\frac{2t+1}{t-2}$ alarıq. x-in bu qiymətini $g\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)=x+4$ münasibətində nəzərə alaq:

$$g(t)=\frac{2t+1}{t-2}+4\Rightarrow g(t)=\frac{6t-7}{t-2}\,.$$

t=x qəbul etsək, $g(x)=\frac{6x-7}{x-2}$ tərs funksiyasını alarıq. İndi bu funksiyanın tərsi olan $f(x)$ funksiyasını tapaq:

$$g(x)=\frac{6x-7}{x-2}\Rightarrow xg(x)-2g(x)=6x-7\Rightarrow xg(x)-6x=-7+2g(x)\Rightarrow x=\frac{-7+2g(x)}{g(x)-6}\Rightarrow$$
$$f(x)=\frac{2x-7}{x-6}\,.$$

Alınan axırıncı funksiyada x=2a+6 yazaq:

$$f(2a+6)=\frac{2(2a+6)-7}{2a+6-6}=\frac{4a+12-7}{2a}=\frac{4a+5}{2a}\,.$$

Şərtə görə $\frac{4a+5}{2a}=\frac{5}{2}\Rightarrow 4a+5=5a\Rightarrow a=5.$

Cavab: $a=5$.

Misal 8.$f(x^2-x)=x^4-2x^3+3x^2-2x-4$ funksiyası verilmişdir. $f(x)$-i və $f(4)$-ü tapın[5].

Həlli: $x^2-x=t$ qəbul edək. Buradan x^2=x+t alarıq. x^2-nın bu qiymətini verilən funksiyada nəzərə alaq:

$$f(t)=(x+t)^2-2x(x+t)+3(x+t)-2x-4\Rightarrow f(t)=x^2+2xt+t^2-2x^2-2xt+3x+3t-2x-4=t^2-x^2+x+3t-4=t^2-(x+t)+x+3t-4=t^2-x-t+x+3t-4=t^2+2t-4\ .$$

Beləliklə, aldıq ki, f(t)= t^2+2t-4. t-nin əvəzinə x yazaq:

$$f(x)=x^2+2x-4.$$

Şərtə görə$f(4)=4^2+2\cdot 4-4, f(4)=20$.

Cavab: $f(x)=x^2+2x-4\ \ f(4)=20$.

Nəticə

Funksional tənliklər və onların sistemləri haqqında çalışmalar, son vaxtlar müəllimləri, tələbələri və şagirdləri düşündürən, ən vacib və mühüm məsələlərdən biridir. Bu növ çalışmalara müəllimlərin işə qəbulu testlərində və orta məktəb abituriyent testlərində tez-tez rast gəlinir. Bunların həlli prosesində böyük çətinliklərlə qarşılaşırlar. Çünki belə məsələlər haqqında məlumatlar çox azdır. Ona görə də funksional tənliklər və onlara aid tənliklər sisteminin öyrənilməsi, araşdırılması və tədris olunması məsləhətdir. Funksioanal tənliklərin həllində əsas məsələ, əvəzləmələrin aparılmasıdır. Əvəzləmələr düzgün aparıldıqda tənliklər daha tez və səmərəli həll olunur.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat

1. Yaqublu H. ,Quluzadə S.,Alışov O., Azadov F. Riyaziyyat test toplusu: Müəllimlərin işə qəbulu. Bakı: MHM, 2024.- 467 s.
2. Balakişiyev A., Soltanova M. Qeyri standart və düşündürücü çalışmalar. Bakı: MBM, 2015.-288 s.
3. Qəhrəmanlı M.İ. Riyaziyyatdan olimpiada məsələləri Bakı: MBM, 2008.-298 s.
4. Quliyev R.M, Qarayev F.A. Riyaziyyatdan olimpiada iştirakçıları üçün 200 variant. Bakı: Təhsil, 2009.-388 s.
5. Агаханов Н.Х., Богданов И.И и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1996-2006 М:МЦНТО, 2007.-472 с.
6. Kapakaş H., Aliyev İ. Analiz ve Cebirde ilginç olimpiyat problemleri ve çözümleri. TÜBİTAK -1998, Antalya.-306 s.
7. Abdullayev V.Ş., Mustafayeva N.Ə. Riyazi analiz kursunda məsələ və misallar. Mingəçevir -2018.-512 s.

ABOUT FUNCTIONAL EQUATIONS AND THEIR SOLUTION METHODS

V.Abdullayev, S.Babushov, A.Mursalova
Mingachevir State University

Abstract: *The article gives some theoretical information aboutfunctional equations and their systems and noted some explanations to them. The meaning of the term "function" has been explained. It has noted that the indication of y=f(x) has first been suggested by German mathematician Leonard Eyler. It has been mentioned that different types of functional equations are solved by different substitutions. The rules of management of different functions has been shown and explained. The article also clearly explains various functional equations and equation systems and notes various difficulties during the solution of these equations.*

Keywords: *functional, equation, function, single, even, periodic, argument, continuous, discontinuous, complex, characteristic, dependence, unknown, composition, superposition*

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ И МЕТОДАХ ИХ РЕШЕНИЯ

В.Ш.Абдуллаев, С.Н. Бабушов, А.М. Мурсалова
Мингячевирский государственный университет

Резюме: *В статье даны некоторые теоретические, сведения относительно функциональных уравнений и их систем; приведены некоторые их разъяснения. Истолкован смысц термина "функция" и указано, что запись функций в виде y=f(x) впервые был предложен великим математиком Леонардом Эйлером. Отмечено, что при решении разных типов функциональных уравнений применяются различные подстановки; приведены и объяснены правила обозначения сложных функций. В статье даны обоснованные и ясные решения различных функциональных уравнений и систем уравнений; отмечены трудности, возникающие в процессе решения.*

Ключевые слова*:* *функционал, уравнение, функция, нечетная, одиночная, четная, периодическая, аргумент, непрерывная, разрывная, композиция, характеристика, зависимость, неизвестное, суперпозиция*

Elmi redaktor: f.-r.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva

Daxil olub: 27.08.2024
Çapa qəbul edilib: 11.09.2024