MİNGƏÇEVİR DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Dayanıqlı inkişaf, cild 5, № 2, 2025

UOT 519.67

DÖRD DƏRƏCƏLİ CƏBRİ TƏNLİKLƏRİN PARABOLA VƏ ÇEVRƏNİN KƏSİŞMƏSİNƏ ƏSASLANAN QRAFİK ÜSULLA HƏLLİ

[1,4]**Sabir Nəriman oğlu Babuşov,** [2,4]**Vaqif Şahismayıl oğlu Abdullayev,**
[3,4]**Səyyarə İlham qızı Yusifova**
[1]sabir.babushov@mdu.edu.az
[2]vaqif.abdullayev@mdu.edu.az
[3]sayyara.yusifova@mdu.edu.az
[4]Mingəçevir Dövlət Universiteti

Xülasə: *Məqalədə məktəb riyaziyyat kursunda şagirdlərin birməhcullu tənliklərin həlli prosesində əldə etdikləri bilik və bacarıqların zənginləşdirilməsi, şagirdlərdə özünə inamın artması, eyni zamanda öyrəndiklərini konkret misallar həllinə tətbiq etmə qabiliyyətinin formalaşdırılmasından danışılır.*

Açar sözlər: *dörddərəcəli tənliklərin qrafik üsulla həlli, tənliyin həqiqi kökləri, parabola və çevrənin tənliyi, qrafik üsul*

Giriş

Cəbrin əsas teoreminə görə n – dərəcəli cəbri tənliyin ən çoxu n sayda həqiqi kökü vardır. Cəbr kursundan üç və dörd dərəcəli tənliklərin Kardano və Ferrari düsturlarının köməyi ilə həlli məlumdur. Lakin bu düsturlar mürəkkəbdir, onların tətbiqi bir çox hallarda mürəkkəb hesablamalara əsaslanır, ona görə də bu düsturlar praktiki olaraq çox az istifadə olunur. Qeyd edək ki, bəzi xüsusi hallarda dörddərəcəli tənlikləri müəyyən üsullar tətbiq etməklə həll etmək mümkündür. Belə üsullardan biri də Kardano və Ferrari düsturlarından istifadə etmədən dörd dərəcəli tənliklərin həqiqi köklərinin qrafik üsulla tapmaqdır

Tutaq ki, dörddərəcəli cəbri tənlik aşağıdakı şəkildə verilmişdir:

$$a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4 = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

Tənliyin hər iki tərəfini a_0-a bölsək, tənlik $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ şəklini alır. Bu tənlikdə $z = x - \frac{a}{4}$ əvəzləməsini aparsaq, tənlikdə üçüncü dərəcəli həddi yox edə bilərik:

$$\left(x-\frac{a}{4}\right)^4 + a\left(x-\frac{a}{4}\right)^3 + b\left(x-\frac{a}{4}\right)^2 + c\left(x-\frac{a}{4}\right) + d = 0$$

$$x^4 - 4x^3\frac{a}{4} + 6x^2\frac{a^2}{16} - 4x\frac{a^3}{64} + \frac{a^4}{256} + ax^3 - 3ax^2\frac{a}{4} + ax\frac{a^2}{16} - a\frac{a^3}{64} + bx^2 - 2bx\frac{a}{4} + b\frac{a^2}{16} + cx - \frac{ac}{4} + {}$$
$$+ d = 0$$

$$x^4 + \left(\frac{3}{8}a^2 - \frac{3}{4}a^2 + b\right)x^2 + \left(\frac{1}{16}a^3 + \frac{1}{16}a^3 - \frac{1}{2}ab + c\right)x + \left(\frac{a^4}{256} - \frac{a^4}{64} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right) = 0$$

$$x^4 + \left(b - \frac{3}{8}a^2\right)x^2 + \left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)x + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right) = 0$$

Sonuncu tənlikdə

$$b - \frac{3}{8}a^2 = n, \quad \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c = p \text{ və } -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d = q$$

əvəz etsək, tənlik aşağıdakı şəkli alar:

$$x^4+nx^2+px+q=0.$$

Aldığımız tənlikdə aşağıdakı çevirmələri aparaq:

$$x^4+nx^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-x^2-\frac{p^2}{4}+q=0;$$

$$x^4+(n-1)x^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0;$$

$$\left(x^2\right)^2+2\frac{n-1}{2}x+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0;$$

$$\left(x^2+\frac{n-1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2=0.$$

Axırıncı tənlikdə $y=x^2$ şəklində yeni dəyişən daxil edək. Alarıq:

$$\begin{cases} y=x^2; \\ \left(y+\frac{n-1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q-\frac{(n-1)^2}{4}=0. \end{cases}$$

və ya

$$\begin{cases} y=x^2; \\ \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(y+\frac{n-1}{2}\right)^2=\frac{(n-1)^2}{4}+\frac{p^2}{4}-q. \end{cases}$$

Sistemin birinci tənliyi parabolanın tənliyi, ikinci tənliyi isə mərkəzi $\left(-\frac{p}{2},-\frac{n-1}{2}\right)$ nöqtəsində və radiusu $R=\sqrt{\frac{(n-1)^2}{4}+\frac{p^2}{4}-q}$ olan çevrənin tənliyidir. Tənliyin həlli qeyd olunan parabola ilə çevrənin qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absisidir. $x^4+nx^2+px+q=0$ tipli bütün tənliklər üçün parabola eyni $\left(y=x^2\right)$, çevrə isə bir tənlikdən digərinə keçdikdə dəyişir. Qeyd etdiklərimizi misallar üzərində şərh edək:

Misal 1. Tənliyin həqiqi köklərini qrafik üsulla tapın:

$$x^4-7x^2+6x=0.$$

Həlli: Tənliyi özü ilə eynigüclü olan aşağıdakı tənliyə çevirək:

$$x^4-7x^2+(x+3)^2-x^2-9=0;$$

$$x^4-8x^2+(x+3)^2-9=0;$$

$$x^4-8x^2+16+(x+3)^2-9-16=0;$$

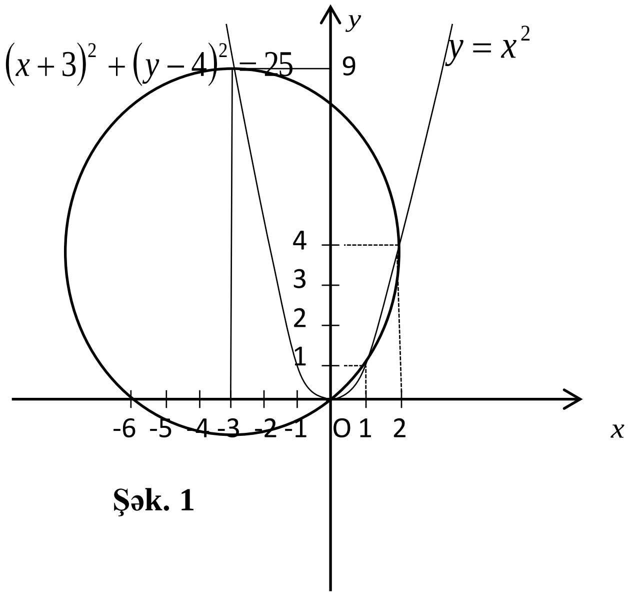
$$\left(x^2-4\right)^2+(x+3)^2=25.$$

Sonuncu tənlikdə $y=x^2$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq:

$$\begin{cases} y=x^2; \\ (x+3)^2+(y-4)^2=25. \end{cases}$$

Sistemdəki birinci tənliyin qrafiki parabola, ikinci tənliyin qrafiki isə mərkəzi $(-3;4)$ nöqtəsində və radiusu $R=5$ olan çevrədir. Qrafikləri eyni koordinat sistemində quraq və kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapaq. Bu nöqtələrin absisləri verilmiş tənliyin həqiqi kökləri olacaq (şək. 1).

Parabola ilə çevrənin kəsişmə nöqtələri $(-3;9)$, $(0;0)$, $(1;1)$ və $(2;4)$. Bu nöqtələrin absisləri $x_1=-3$, $x_2=0$, $x_3=1$ və $x_4=2$ verilmiş tənliyin həqiqi kökləri olacaqdır.



Şək. 1

Cavab: $x_1=-3$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$.

Misal 2. $z^4+4z^3+3z^2-8z+1=0$ tənliyinin həqiqi köklərini qrafik üsulla tapın.

Həlli: z^3-nu tənlikdən yox etmək üçün tənlikdə $z=x-1$ əvəzləməsini aparaq:

$$(x-1)^4+4(x-1)^3+3(x-1)^2-8(x-1)+1=0.$$

Buradan alarıq:

$$x^4-3x^2-6x+9=0.$$

Bu tənliyi aşağıdakı kimi çevirək:

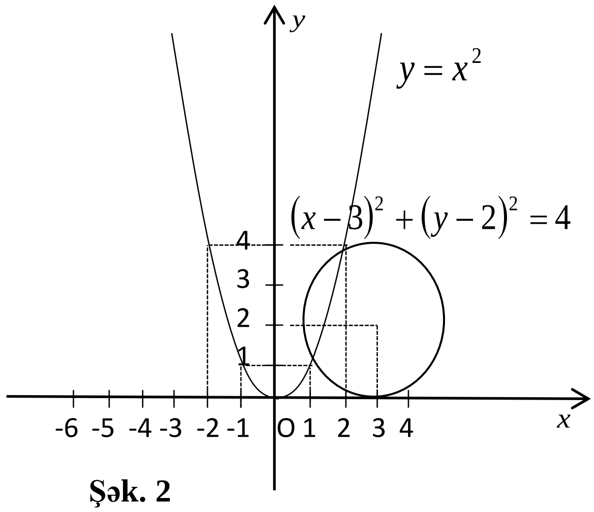
$$x^4-4x^2+x^2-6x+9=0;$$

$$(x^2)^2-4x^2+4-4+x^2-6x+9=0;$$

$$(x^2-2)^2+(x-3)^2=4.$$

Sonuncu tənlikdə $y=x^2$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq:

$$\begin{cases} y=x^2; \\ (x-3)^2+(y-2)^2=4. \end{cases}$$



Şək. 2

Alınan tənliklərin qrafikləri, $y=x^2$ parabola və $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ mərkəzi $(3;2)$ nöqtəsində radiusu $R=2$ olan çevrədir. Bu qrafikləri quraq (şək. 2):

Bu qrafiklər $(1{,}1;1{,}2)$ və $(1{,}9;3{,}6)$ nöqtələrində kəsişir. Deməli, tənliyin iki həqiqi və iki kompleks kökü vardır. Tənliyin həqiqi kökləri $x_1\approx1{,}1$, $x_2\approx1{,}9$. Onda verilən tənliyin həqiqi kökləri $z_1\approx1{,}1-1=0{,}1$ və $z_2\approx1{,}9-1=0{,}9$.

Cavab: Tənliyin həqiqi kökləri $z_1\approx1{,}1-1=0{,}1$ və $z_2\approx1{,}9-1=0{,}9$.

Misal 3. $z^4-8z^3+31z^2-60z+49=0$ tənliyinin həqiqi köklərini qrafik üsulla tapın.

Həlli: Tənlikdə z^3 - nu yox etmək üçün $z=x-\dfrac{-8}{4}=x+2$ əvəzləməsini aparaq:

$$(x+2)^4-8(x+2)^3+31(x+2)^2-60(x+2)+49=0;$$

$$x^4+7x^2+5=0;$$

$$x^4+6x^2+x^2+5=0;$$

$$(x^2)^2+6x^2+9-9+x^2+5=0;$$

$$\left(x^2+3\right)^2+x^2=4.$$

Sonuncu tənlikdə $y=x^2$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y+3)^2=4 \end{cases}.$$

Hər iki tənliyin qrafikini quraq (şək. 3). Qrafiklər kəsişmir, deməli tənliyin həqiqi kökləri yoxdur.

Cavab: Tənliyin həqiqi kökü yoxdur.

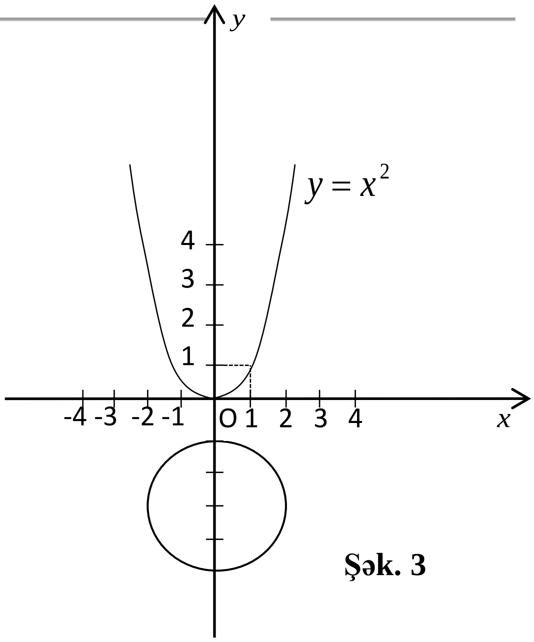
Misal 4. $x^4+3x^2+2x+2=0$ tənliyin həqiqi köklərini qrafik üsulla tapın.

Həlli: Tənlikdə aşağıdakı çevirməni aparaq:

$$x^4+2x^2+x^2+2x+1+1=0;$$

$$\left(\left(x^2\right)^2+2x^2+1\right)+\left(x^2+2x+1\right)=0;$$

$$\left(x^2+1\right)^2+(x+1)^2=0.$$



Şək. 3

Sonuncuda $y=x^2$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq:

$$(y+1)^2+(x+1)^2=0 \text{ və ya } \begin{cases} y=x^2; \\ (x+1)^2+(y+1)^2=0. \end{cases}.$$

Çevrənin radiusu $R=0$ olduğu üçün çevrə $(-1;-1)$ nöqtəsinə yığılır. Bu nöqtə $y=x^2$ parabolası üzərində yerləşmədiyi üçün tənliyin həqiqi kökü yoxdur.

Cavab: Tənliyin həqiqi kökü yoxdur.

Misal 5. $x^4-x^2-2x+2=0$ tənliyin həqiqi köklərini qrafik üsulla tapın.

Həlli: Tənlikdə aşağıdakı çevirməni aparaq:

$$x^4-2x^2+x^2-2x+2=0;$$

$$\left(\left(x^2\right)^2-2x^2+1\right)+\left(x^2-2x+1\right)=0;$$

$$\left(x^2-1\right)^2+(x-1)^2=0.$$

Sonuncuda $y=x^2$ əvəzləməsini aparsaq, alarıq:

$$\begin{cases} y=x^2; \\ (x-1)^2+(y-1)^2=0. \end{cases}.$$

Çevrənin radiusu $R=0$ olduğu üçün çevrə $(1;1)$ nöqtəsinə çevrilir. Bu nöqtə $y=x^2$ üzərində yerləşdiyi üçün tənliyin həqiqi kökü $x=1$ - dir. $x=1$ kökünün ikiqat kök olduğunu

$$\left(x^2-1\right)^2+(x-1)^2=0$$

görmək olar. Həqiqətən $x^2-1=(x-1)(x+1)$ və

$$(x-1)^2(x+1)^2+(x-1)^2=0$$

$$(x-1)^2\left((x+1)^2+1\right)=0 \Rightarrow x_1=x_2=1.$$

Cavab: Tənliyin iki bərabər həqiqi kökü vardır.

Misal 6. $x^4+3x^2+2x+3=0$ tənliyin həqiqi köklərini qrafik üsulla tapın.

Həlli: Tənlikdə aşağıdakı çevirmələri aparaq:

$$x^4+2x^2+x^2+2x+3=0;$$

$$\left(x^2\right)^2+2x^2+1+x^2+2x+1+1=0;$$

$$\left(x^2+1\right)^2+\left(x+1\right)^2=-1.$$

Göründüyü kimi x-in heç bir həqiqi qiyməti tənliyi ödəmir.

Cavab: Tənliyin həqiqi kökü yoxdur.

Nəticə

“Dörddərəcəli cəbri tənliklərin parabola və çevrənin kəsişməsinə əsaslanan qrafik üsulla həlli” mövzusu riyazi modelləşdirmə, analitik həndəsə və funksiyaların qrafik təhlili kimi sahələrin kəsişməsində yer alır. Bu üsul həm nəzəri riyaziyyatda tənliklərin köklərinin vizual təhlili üçün mühüm alət olmaqla yanaşı, müxtəlif tətbiqi elmlərdə – mühəndislikdə trayektoriyaların modelləşdirilməsində, kompüter qrafikasında obyektlərin qarşılıqlı təsirinin hesablanmasında, data analitikada qrafik vizuallaşdırmaların qurulmasında və informasiya texnologiyalarında qrafik alqoritmlərin işlənməsində geniş istifadə olunur.

Mövzu xüsusilə Avtonom sistemlər və robototexnika (mühəndislikdə riyazi modelləşdirmə) üzrə ən uyğundur. Bununla yanaşı, kompüter modelləşdirmə və simulyasiya, data analitika və vizuallaşdırma və İKT və qrafik interfeyslər istiqamətləri ilə də əlaqələndirilə bilər.

Beləliklə, araşdırılan mövzu həm riyazi nəzəriyyənin inkişafı, həm də innovativ texnoloji sahələrdə tətbiqi baxımından əhəmiyyətli olub, müxtəlif istiqamətlərdə istifadə oluna biləcək praktik və analitik imkanlar təqdim edir.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı

1. M.M.Yaqubov, T.S.İsmayılov, İ.Ə.Ağakişiyev. Riyaziyyat (Məsələ və misallar). Bakı – 2015.
2. J.R.Baxşəliyev, L.S.Əbdülkərimli. Cəbr kursu. Bakı – 2011.
3. MBA (İQM). Bakı – 2013.
4. M.Əkbərov. Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi. Bakı – 2005.
5. N.Qəhrəmanova, M.Kərimov, İ.Hüseynov. Riyaziyyat – 9 (dərslik). Bakı – 2021.
6. В.М.Говоров, П.Т.Дыбов, Н.В.Мирошин, С.Ф.Смирнова. Сборник конкурсных задач по математике. М.: Наука, 1983.

GRAPHİCAL METHOD TO SOLVE QUARTIC EQUATIONS BASED ON THE INTERSECTION OF A PARABOLA AND A CIRCLE

S.N.Babushov, V.S.Abdullayev, S.I.Yusifova
Mingachevir State University

Abstract: *The article discusses enriching students’ knowledge and skills acquired in the process of solving single-variable equations in the school mathematics curriculum, increasing their self-confidence, and developing the ability to apply what they have learned to solving concrete examples.*

Key words: *graphical solution of quartic equations, real roots of an equation, parabola and circle equations, graphical method*

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ, ОСНОВАННЫЙ НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПАРАБОЛЫ И ОКРУЖНОСТИ

С. Н. Бабушов, В. Ш. Абдуллаев, С.И.Юсифова
Мингечевирский государственный университет

Резюме: *В статье рассматривается обогащение знаний и навыков учащихся, полученных в процессе решения уравнений с одной переменной в школьной программе по* *математике, повышение их уверенности в себе и развитие умения применять полученные знания к решению конкретных примеров.*

Ключевые слова: *графическое решение уравнений четвертой степени, действительные корни уравнения, уравнения параболы и окружности, графический метод*

Elmi redaktor: f.-r.f.d., dos. S.Mustafayev
Çapa təqdim edən redaktor: tex.f.d., dos. A.Əliyeva
Daxil olub: 10.10.2025
Çapa qəbul edilib: 17.10.2025